Algorithmique I
Année 2008-2009

A. Benoit, B. Depardon
C. Mouilleron, C. Rezvoy

TD n°13 Méthode du mille-feuille

1 Couverture par sommets

Nous considérons ici le problème de la couverture par sommets : étant donné un graphe non-orienté $G = (V, E)$ et une fonction de poids sur les sommets $w : V \to \mathbb{Q}+$, trouver $S \subseteq V$ de poids minimum qui couvre les arêtes (c'est à dire $\forall\ e \in E, \exists\ s \in S : s \in e$). En cours, nous avons vu une 2-approximation pour le cas où w est constante. Nous allons étudier ici une 2-approximation dans le cas général. Pour ce faire nous nous intéressons à un type de fonction de poids particulier : les fonctions de poids par degré. w est par degré si $\exists c > 0, \forall v \in V : w(v) = c \cdot deg(v)$.

Question 1.1 Soit $G = (V, E), w$ une instance du problème telle que w est par degrés. Montrer que $w(V) \leq 2 \cdot OPT$.

Solution : *OPT couvre toutes les arêtes, on a donc :* $\sum_{v \in OPT} deg(v) \geq m$ *et par définition de c il vient :* $OPT \geq c \cdot m$. *Or* $w(v) = c \cdot \sum_{v \in V} deg(v) = 2 \cdot c \cdot m$, *d'où* $w(v) \leq 2 \cdot OPT$. □

On sait donc traiter les instances avec une fonction de poids par degrés. La méthode du mille-feuille consiste alors à décomposer une instance quelconque en une famille d'instances avec fonction de poids par degrés.

Question 1.2 À chaque étape de la décomposition, on cherche la plus grande fonction de poids par degrés inférieure à w. Expliciter.

Solution : *On cherche une fonction w' telle que :*
- $\forall\ v \in V, w'(v) \leq w(v)$, *(inférieur à w)*
- $\exists\ c', w'(v) = c' \cdot deg(v)$, *(par degrés)*
- *w' est maximale pour les fonctions par degrés. En travaillant dans $\mathbb{R} \cup +\infty$:*

$$\forall x \in V, c \leq \frac{w(v)}{deg(v)} \Leftrightarrow c' \leq \min_{v \in V} \frac{w(v)}{deg(v)}$$

On prend alors $c' = \min_{v \in V} \frac{w(v)}{deg(v)}$ *car c'est le plus grand que l'on puisse choisir.* □

L'algorithme du mille-feuille est le suivant sur l'instance $(G(V, E), w)$:

Données :

$t \leftarrow 0$;

$G_0 \leftarrow G$;

$w_0 \leftarrow w$;

début

tant que G_t *contient une arrête* **faire**

1 $D_t \leftarrow u \in V_t : deg_t(u) = 0$;

2 soit p_t la plus grande fonction de poids par degrés inférieure à w_t dans G_t;

3 $S_t \leftarrow u \in V_t : p_t(u) = w_t(u)$;

4 $G_{t+1} \leftarrow G_t \ (D_t \cup S_t)$;

5 $w_{t+1} \leftarrow w_t - p_t$;

$t \leftarrow t = 1$;

fin

retourner $C = \bigcup_{k=0}^{t-1} S_k$

fin

Question 1.3 Montrer que l'algorithme termine en temps polynomial.

Solution : *On a à chaque étape* $|S_t| \geq 1$, *car* p_t *est maximale et* $G_{t+1} \leftarrow G_t \ (D_t \cup S_t)$ *donc* $|G_{t+1}| \leq |G_t|$; *on exécute donc au maximum* n *fois la boucle* ***tant que***.

- *ligne 1 en* $\mathcal{O}(n)$
- *ligne 2 en* $\mathcal{O}(n)$
- *ligne 3 en* $\mathcal{O}(n)$
- *ligne 4 en* $\mathcal{O}(n^2)$
- *ligne 5 en* $\mathcal{O}(n)$

□

Question 1.4 Montrer que l'ensemble C de sommets retourné par l'algorithme est bien une couverture.

Solution : *Soit* $e = (u_l, u_m) \in E$, $\exists\ i$ *tel que* $e \in G_i$, $e \notin G_{i+1}$. *On peut supposer :* $u_l \in (S_i \cup D_i)$. *On a* $deg_i(u_l) \geq 1 \Rightarrow u \notin D_i$ *et donc* $u_l \in S_i$. *Alors* $u_l \in C$ *et* e *est couvert par* C. *donc* C *est bien une couverture.* □

Question 1.5 Pour tout $v \in C$ exprimer $w(v)$ en fonction des poids par degrés p_k. Qu'en est il pour $v \notin C$?

Solution : *A chaque étape,* $w_{t+1} \leftarrow w_t - p_t$. *Soit* $v \in C$: $v \in S_j$ *et on cherche un majorant de* $w(v)$. $w(v) = \sum_{k=0}^{j-1} p_k(v) + w(v)$ *et* $v \in S_j$ *donc* $w_j(v) = p_j(v)$. *D'où* $w(v) = \sum_{k=0}^{j} p_k(v)$. *Si* $v \notin C : v \in D_k$ *et on cherche un minorant de* $w(v)$.

$$w(v) = \sum_{k=0}^{K-1} p_k(v) + w_k(v) \geq \sum_{k=0}^{K} p_k(v)$$

(car $p_K(v) = 0$) $\square$

Question 1.6 Pour toute étape i de l'algorithme, comparer $p_i(C \cap G_i)$ et $p_i(C^* \cap G_i)$. (Indication : on remarquera que $C^* \cap G_i$ est une couverture de G_i).

Solution :

Une couverture est stable par restriction à un sous-graphe. Soit OPT une couverture optimale de (G_i, p_i). D'apres la question 1, $p_i(C \cap G_i) \leq 2 \cdot OPT$. Comme $C^* \cap G_i$ est une couverture de G_i , $p_i(C^* \cap G_i) \geq OPT$. Donc $p_i(C \cap G_i) \leq 2 \cdot p_i(C^* \cap G_i)$. $\square$

Question 1.7 Montrer que l'algorithme est une 2-approximation du problème de la couverture par sommet minimum avec des poids arbitraires. Montrer que l'analyse de l'algorithme est exacte.

Solution : $\square$