Algorithmique et architectures parallèles
Partiel du 10 novembre 2009
Et avec votre hypercube, qu'est-c'que j'vous sers?

(Durée: 2 heures)

Benjamin DEPARDON   Anne BENOIT

1 Réseau hyper-Pertersen

Vous avez étudié en cours l'hypercube. Nous allons maintenant étudier un nouveau réseau, le réseau *Hyper-Petersen*, basé sur deux types de graphes : les hypercubes et les graphes de Petersen.

1.1 Quelques définitions

Définition 1 (Graphe Petersen)**.** *Un graphe Petersen est composé de 10 nœuds, numérotés à l'aide des couples suivants :* $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$ *et* $\{4,5\}$. *Il existe un lien entre deux nœuds* $\{i,j\}$ *et* $\{k,l\}$ *si et seulement si les ensembles* $\{i,j\}$ *et* $\{k,l\}$ *sont disjoints. La Figure 1 présente un tel réseau.*

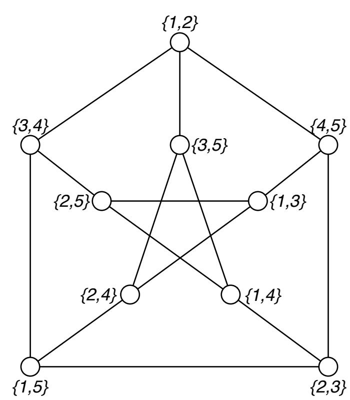


FIG. 1: Réseau Petersen

Notation 1. *Nous utiliserons les notations suivantes :*
- P *: graphe de Petersen,*
- Q_n *: hypercube de dimension* n*,*
- K_n *: graphe complet de* n *nœuds.*

Définition 2 (Graphe Hyper-Petersen)**.** *On définit un graphe* Hyper-Petersen *(*HP_n*) pour* $n \geq 3$*, comme étant le produit cartésien d'un hypercube de dimension* $n-3$ *et d'un graphe de Petersen* P *:* $HP_n = Q_{n-3} \times P$.

▷ **Question 1** *Dessinez un réseau* $HP_4 = Q_1 \times P$ *en expliquant votre méthode.*

▷ **Question 2** *En utilisant le produit cartésien, donnez une définition récusive du graphe* HP_n.

1.2 Propriétés topologiques

▷ **Question 3** *Donnez le degré, le diamètre et le nombre de nœuds d'un réseau* HP_n*.*

Soit κ la connectivité du réseau, *i.e.,* le nombre de nœuds qu'il faut enlever du réseau pour avoir un réseau déconnecté. La connectivité du réseau est une mesure de la résistance aux pannes d'un réseau.

▷ **Question 4** *Quelle est la connectivité* κ *d'un réseau* HP_n *?*

▷ **Question 5** *Rappelez les caractéristiques d'un Hypercube* Q_n *(degré, diamètre, nombre de nœuds, connectivité). Quels avantages/inconvénients voyez vous entre un réseau Hyper-Petersen* HP_n *et un Hypercube* Q_n *?*

1.3 Routage

Une topologie ne peut être efficace que s'il est possible de définir des algorithmes de communications point à point et de communications collectives efficaces.

▷ **Question 6** *Proposez un algorithme efficace de routage pour envoyer un message entre deux nœuds distincts du réseau. Combien d'étapes sont nécessaires à l'acheminement du message ?*

▷ **Question 7** *Écrivez un algorithme de broadcast. Combien d'étapes sont nécessaires ?*

1.4 Plongements

Nous donnons tout d'abord les définitions de *dilatation* d'un plongement, ainsi que de deux opérations pouvant être utile pour réaliser des plongements : la *fusion* et la *déconnexion*.

Définition 3 (Dilatation)**.** *Lorsque l'on plonge un graphe* G_1 *dans un graphe* G_2*, la dilatation d'une arête* $e \in E(G_1)$ *est la longueur du chemin* $\psi(e)$ *dans* G_2*. La dilatation d'un plongement est le maximum pris sur l'ensemble des arêtes de* G_1*.*

On s'autorise ainsi des plongements où une arête dans G_1 *peut être remplacée par un chemin dans* G_2*.*

Définition 4 (Fusion et Déconnexion)**.** *Nous nous autoriserons les deux opérations suivantes sur le graphe dans lequel le plongement est réalisé. Ces opérations permettent de modifier le graphe en fusionnant des nœuds, ou en enlevant des liens.*

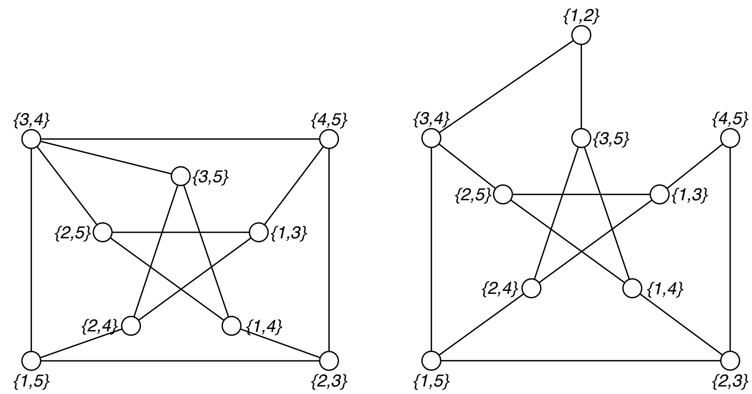
Soit u *et* v *deux nœuds d'un graphe, on définit* $fusion(u, v)$ *l'action d'enlever l'arête* (u, v)*, et de fusionner les deux nœuds* u *et* v *en un seul nœud ayant pour voisins tous les voisins de* u *et de* v*. On définit également* $deconnecte(u, v)$ *l'action consistant à enlever le lien* (u, v)*. La Figure 2 présente ces deux opérations sur* P*.*

Attention, contrairement à tous les plongements que nous avons vu en TD qui étaient de dilatation 1, ici, si la dilatation n'est pas indiquée elle peut être quelconque.

▷ **Question 8** *Montrez qu'il existe un plongement d'un anneau de taille* 1.25×2^n *dans* HP_n*, de dilatation 1, pour tout* $n \geq 4$*.*

▷ **Question 9** *Expliquez comment réaliser le plongement d'une grille de taille* 3×3 *dans un graphe de Petersen* P*. Vous pourrez au besoin utiliser les opérations* $fusion$ *et* $deconnecte$*. Quelle est la dilatation du plongement ? Puis, en vous appuyant sur l'exemple d'une grille* 6×6*, expliquez comment vous plongeriez une grille de taille* $a \times a$ *dans* HP_n*.*

▷ **Question 10** *Plus difficile. Comment plonger un arbre binaire complet à* $2^n - 1$ *sommets dans un* HP_n *pour* $n \geq 4$*, avec une dilatation de 1 ? Présentez le plongement pour* $n = 5$*.*



(a) $fusion(\{1,2\},\{3,4\})$ (b) $deconnecte(\{4,5\},\{1,2\})$

FIG. 2: $fusion(\{1,2\},\{3,4\})$ et $deconnecte(\{4,5\},\{1,2\})$

2 Anneaux de processeurs

Nous nous intéressons à la résolution d'un système linéaire $Ax = b$, où A est une matrice inférieure triangulaire d'ordre n, et b est un vecteur de n éléments. La topologie que nous utiliserons est un anneau de p processeurs P_0, P_1, ..., P_{p-1}. Nous considérerons que n est choisi de telle sorte qu'il soit divisible par p.

▷ **Question 11** *On veut distribuer les colonnes de A aux processeurs. Quelle stratégie choisissez-vous ? Donnez un algorithme parallèle adapté à cette distribution.*

▷ **Question 12** *On veut maintenant distribuer les lignes de A aux processeurs. Quelle stratégie choisissez-vous ? Donnez un algorithme parallèle adapté à cette distribution.*

3 PRAM

▷ **Question 13** *Soit A et B deux matrices de taille $n \times n$. Proposez un algorithme* `CREW` *permettant de multiplier A et B en $O(\log n)$ sur n^3 processeurs.*

Références

[1] SK Das and AK Banerjee. Hyper Petersen network : Yet another hypercube-like topology. In *Frontiers of Massively Parallel Computation, 1992., Fourth Symposium on the*, pages 270–277, 1992.