Réseaux d'interconnexion—2

1 "Losing my religion"

Un Réseau Échange-Mélange (REM) avec $p = 2^r$ processeurs est défini comme suit :
(i) numéroter les processeurs de 0 à $p-1$ et les écrire en binaire sur r bits :

$$q = b_{r-1}b_{r-2}\dots b_2b_1b_0 \text{ avec } b_i \in \{0,1\} \text{ pour } 0 \le i \le r-1$$

(ii) pour $q = b_{r-1}b_{r-2}\dots b_2b_1b_0$, définir :

$$\begin{aligned} rot(q) &= b_0b_{r-1}b_{r-2}\dots b_2b_1 \\ exch(q) &= b_{r-1}b_{r-2}\dots b_2b_1(1-b_0) \end{aligned}$$

(iii) pour tout q, $0 \le q \le p-1$, relier q à $rot(q)$ et à $exch(q)$ par des arcs orientés.

▷ **Question 1** *Dessiner un REM à 2^4 processeurs (en regroupant les nœuds par paires, puis par motif).*

▷ **Question 2** *Proposer un algorithme de routage d'un processeur à un autre dans un REM. Quel est le diamètre d'un REM à 2^r processeurs ?*

2 L'effet papillon

Un réseau « butterfly » de dimension r, noté $BUT(r)$, est un réseau composé de $(r+1)2^r$ nœuds organisés en 2^r lignes de $r+1$ niveaux. Un nœud est désigné par une paire (w, i) où w est un entier codé en représentation binaire sur r bits qui numérote la ligne du nœud, et où i numérote le niveau du nœud ($0 \leqslant i \leqslant r$). Deux nœuds (w, i) et (w', i') sont reliés par un arc si et seulement si $i' = i + 1$ et l'une des deux conditions suivantes est remplie :

- $w = w'$
- w et w' ne diffèrent que par le i-ème bit.

La figure 1, représente $BUT(3)$.

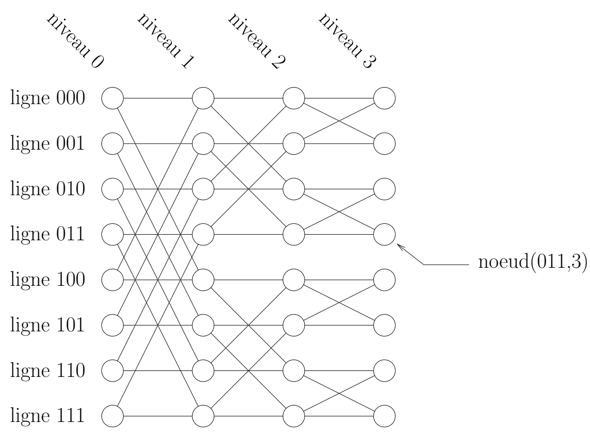

FIG. 1 – $BUT(3)$, le réseau butterfly de dimension 3.

▷ **Question 3** *Quelle est l'architecture du réseau obtenu lorsque l'on regroupe les nœuds d'une même ligne en un seul nœud (et que l'on enlève les arcs redondants) ?*

▷ **Question 4** *Le réseau butterfly a une structure récursive. Donner deux moyens d'obtenir deux réseaux butterfly de dimension $r-1$ à partir d'un réseau butterfly de dimension r.*

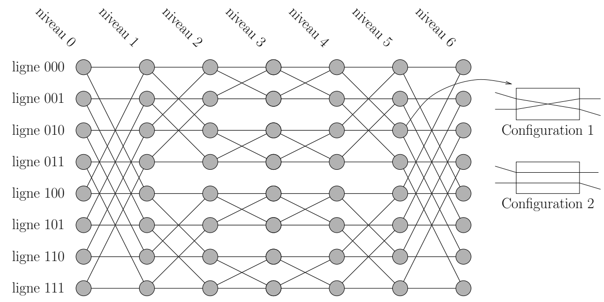

FIG. 2 – Le réseau de Benes de dimension 3

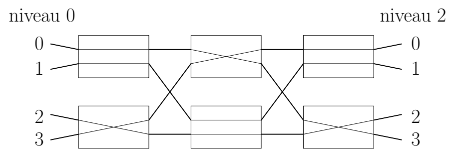

FIG. 3 – Une configuration du réseau de Benes de dimension 1

▷ **Question 5** *Montrer qu'il existe un unique chemin de longueur r entre un nœud $(w, 0)$ du niveau 0 et un nœud (w', r) du niveau r. Quel est le diamètre de $BUT(r)$?*

Un réseau de Benes de dimension r est composé de deux réseaux butterfly mis « dos à dos ». Les nœuds des niveaux r de chaque butterfly sont fusionnés : chaque niveau comprend alors $2r + 1$ nœuds. sur un même niveau. La figure 2 montre un réseau de Benes de dimension 3. On supposera ici que les nœuds du réseau sont uniquement des commutateurs 2×2, pouvant être configurés en croix ou en lignes parallèles pour transmettre les données.

▷ **Question 6** *Montrer (par récurrence sur la dimension r du réseau) que le réseau de Benes peut être configuré pour réaliser une permutation arbitraire : étant donné une permutation quelconque π des 2^{r+1} premiers entiers (de 0 à $2^{r+1} - 1$), il existe une configuration des commutateurs qui permet de connecter simultanément l'entrée i du réseau à sa sortie $\pi(i)$. Par exemple, figure 3 est représentée une configuration des commutateurs d'un réseau de Benes de dimension 1 réalisant la permutation $\pi = (0, 1, 2, 3) \rightarrow (3, 1, 2, 0)$.*

3 Réduction sur un Nanneau

On dispose de p fichiers F_i distribués sur un anneau unidirectionnel de p processeurs : P_i possède le fichier F_i, pour $1 \leq i \leq p$ (on pourra par exemple assimiler ces fichiers à des matrices). On dispose d'une loi associative et a priori non commutative sur ces fichiers, notée $\odot$ (ce pourra être l'addition ou la multiplication de matrices). On souhaite calculer la réduction $F_1 \odot F_2 \odot \cdots \odot F_p$, et le résultat pourra se trouver sur n'importe quel processeur de l'anneau. Le coût de communication d'un fichier sur un lien de l'anneau est c. Le coût de calcul d'une opération $\odot$ est w.

▷ **Question 7** *Dans un premier temps, on suppose que $w \ll c$ (c'est le cas par exemple pour l'addition de matrices). Donner un algorithme réalisant l'opération de réduction sur l'anneau, et calculer sa complexité.*

▷ **Question 8** *On s'intéresse maintenant à une opération $\odot$ telle que $c \ll w$ (c'est le cas par exemple pour la multiplication de matrices). Proposez un algorithme de réduction adapté à ce cas, et donner sa complexité.*