



**ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ**  
**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ**  
**ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε  
δίκτυα τοπολογίας πλέγματος**

**Γεώργιος Σ. Μαρκομανώλης**

Επιβλέπων: **Νικόλαος Μισυρλής**, Καθηγητής ΕΚΠΑ

**ΑΘΗΝΑ**  
**ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2008**

## **ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα  
τοπολογίας πλέγματος

**Γεώργιος Σ. Μαρκομανώλης**  
M781

### **ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:**

**Νικόλαος Μισυρλής**, Καθηγητής ΕΚΠΑ

### **ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:**

**Νικόλαος Μισυρλής**, Καθηγητής ΕΚΠΑ  
**Αντώνης Πασχάλης**, Καθηγητής ΕΚΠΑ

**Νοέμβριος 2008**

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάμε την μέθοδο της επιταχυντικής διάχυσης (ΕΔΧ) για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα επεξεργαστών τοπολογίας πλέγματος. Η μέθοδος προσεγγίστηκε με ανάλυση Fourier για την εύρεση βέλτιστων παραμέτρων για την σύγκλιση της. Αρχικά έγινε ανάλυση για δισδιάστατο αναδιπλούμενο πλέγμα. Επίσης πραγματοποιήθηκε και σύγκριση με την μέθοδο της διάχυσης (ΔΧ) όπου αποδεικνύεται ότι ο παράγοντας σύγκλισης της ΕΔΧ είναι μικρότερος από τον παράγοντα της ΔΧ. Στην συνέχεια με την σύγκριση στο επίμηκες αναδιπλούμενο πλέγμα, αποδείχτηκε ότι είναι δύο φορές καλύτερο από το επίμηκες της ΔΧ. Η βασική προσφορά της παρούσας διπλωματικής είναι στην μελέτη του δισδιάστατου πλέγματος, όπου προέκυψαν τα αντίστοιχα αποτελέσματα με το αναδιπλούμενο πλέγμα σε ό,τι αφορά την σύγκριση με την ΔΧ. Τέλος έγινε ένα πλήθος αριθμητικών πειραμάτων για την επαλήθευση της θεωρίας.

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ: Παράλληλοι Υπολογισμοί

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Εξισορρόπηση φορτίου, Laplacian πίνακας, διάχυση, αναδιπλούμενο πλέγμα, πλέγμα

## ABSTRACT

In this Master thesis Extrapolated Diffusion (EDF) have been studied for load balancing in a torus or mesh topology of CPUs. Closed form formulae for the optimum values of the edge weights and cpu speed, are determined using local Fourier analysis. At start it is studied for 2d - torus topology in order to determine optimum parameters. Also it is compared with diffusion method (DF) and it's proved that EDF's convergence factor is smaller than DF's. In continuum the comparison with stretched torus, proves that it's twice better than DF's dtretched torus. The main contribution of this thesis is the study of 2d-mesh topology where there are similar results as in torus topology, concerning comparison with DF. Finally the numerical experiments are in accordance with our theoretical expectations proving the validity of our theory.

SUBJECT AREA: Parallel Computing

KEYWORDS: Load balancing, laplacian matrix,  
Torus, Mesh

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Νικόλαο Μισυρλή για την επιστημονική βοήθεια που μου προσέφερε, για την εμπιστοσύνη που με περιέβαλλε, για την στήριξη του σε κάθε στάδιο της διπλωματικής εργασίας αλλά και των μεταπτυχιακών μου σπουδών. Επίσης ένα θερμό ευχαριστώ τόσο στον κ. Νικόλαο Μισυρλή όσο και στον κ. Φίλιππο Τζαφέρη γιατί χάρη στο διδακτικό και ερευνητικό τους έργο, είδα έναν αρχικά άγνωστο τομέα που με προσέλκυσε και επιθυμώ να ακολουθήσω. Τέλος, ευχαριστώ την οικογένεια μου για την πλήρη υποστήριξη που μου προσφέρουν, που πιστεύουν σε μένα, που με ενθαρρύνουν σε κάθε βήμα που κάνω και για τις πολύτιμες συμβουλές τους.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>Πρόλογος</b>	<b>10</b>
<b>1 Εισαγωγή</b>	<b>11</b>
1.1 Το πρόβλημα της εξισορρόπησης φορτίου . . . . .	11
1.2 Διαφορετικά μοντέλα εξισορρόπησης φορτίου . . . . .	12
1.3 Αλγόριθμοι εξισορρόπησης φορτίου . . . . .	12
<b>2 Η Μέθοδος της διάχυσης</b>	<b>15</b>
2.1 Εισαγωγή . . . . .	15
2.2 Η μέθοδος της Επιταχυντικής Διάχυσης (ΕΔΧ) . . . . .	16
2.3 Ανάλυση σύγκλισης της ΕΔΧ μεθόδου . . . . .	19
<b>3 Το Αναδιπλούμενο Πλέγμα (Torus)</b>	<b>21</b>
3.1 Προσδιορισμός βέλτιστων τιμών των παραμέτρων . . . . .	21
3.2 Προσδιορισμός των βέλτιστων $\tilde{c}_i^{(1)}$ και $\tilde{c}_j^{(2)}$ . . . . .	27
3.3 Σύγκριση με την μέθοδο ΔΧ . . . . .	31
3.4 Το επίμηκες Αναδιπλούμενο Πλέγμα . . . . .	32
<b>4 Το Πλέγμα (Mesh)</b>	<b>34</b>
4.1 Προσδιορισμός βέλτιστων τιμών των παραμέτρων . . . . .	34
4.2 Προσδιορισμός των βέλτιστων $\tilde{c}_i^{(1)}$ και $\tilde{c}_j^{(2)}$ . . . . .	35

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

4.3 Σύγκριση με την μέθοδο ΔΧ . . . . .	37
4.4 Το επίμηκες Πλέγμα . . . . .	39
4.5 Σύγκριση Αναδιπλούμενου Πλέγματος και Πλέγματος . . . . .	40
<b>5 Αριθμητικά αποτελέσματα</b>	<b>44</b>
5.1 Σύγκριση ΔΧ και ΕΔΧ για τοπολογία πλέγματος . . . . .	44
5.2 Σύγκριση αναδιπλούμενου πλέγματος και πλέγματος για την ΕΔΧ . . . . .	45
<b>6 Συμπεράσματα - Μελλοντικό ερευνητικό έργο</b>	<b>47</b>
6.1 Τι μελετήθηκε θεωρητικά . . . . .	47
6.2 Απαντήσεις που δόθηκαν με αυτή την διπλωματική . . . . .	47
6.3 Μελλοντικό Ερευνητικό Έργο . . . . .	48
<b>Παράρτημα</b>	<b>49</b>
Π.1 Τεχνικά Χαρακτηριστικά . . . . .	49
Π.2 Κώδικας . . . . .	49
<b>Ορολογία</b>	<b>71</b>
<b>Αναφορές</b>	<b>72</b>

## Κατάλογος Πινάκων

3.1	Τύποι για βέλτιστο $\tau_{ij}$ και $\gamma_{ij}$ σε δισδιάστατο αναδιπλούμενο πλέγμα . . .	24
3.2	Τύποι για τις βέλτιστες τιμές των $\tau^{opt}$ και $\gamma^{opt}$ σε δισδιάστατο αναδιπλούμενο πλέγμα	28
4.1	Τύποι για βέλτιστο $\tau_{ij}$ και $\gamma_{ij}$ σε δισδιάστατο πλέγμα . . . . .	34
4.2	Τύποι για τις βέλτιστες τιμές των $\tau^{opt}$ και $\gamma^{opt}$ σε δισδιάστατο πλέγμα . . .	36
5.1	Σύγκριση των επαναλήψεων για την ΔΧ και ΕΔΧ σε τοπολογία πλέγματος	44
5.2	Σύγκριση των επαναλήψεων της ΕΔΧ για το αναδιπλούμενο πλέγμα και πλέγμα	45
5.3	Σύγκριση των επαναλήψεων της ΕΔΧ για μικτή περίπτωση . . . . .	46

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

## Κατάλογος Σχημάτων

1.1 Αλγόριθμοι εξισορρόπησης φορτίου . . . . .	14
--	----

## Πρόλογος

Στα πλαίσια των σπουδών μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα του τμήματος Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών Αθηνών, στην κατεύθυνση <<Υπολογιστική Επιστήμη>> ήρθα σε επαφή με αρκετά γνωστικά αντικείμενα της πληροφορικής. Σκοπός είναι η βελτίωση του τρόπου επίλυσης προβλημάτων που αφορούν τα μαθηματικά και την πληροφορική. Προσωπικά με προσέλκυσε ο τομέας της παραλληλίας, η διαδικασία με την οποία εκμεταλλευόμαστε όλη την καινούρια τεχνολογία για την επίλυση προβλημάτων που απαιτούν μεγάλη υπολογιστική ισχύς. Η προσπάθεια για να παραλληλοποιηθεί ένα πρόβλημα και να πάρουμε τις μέγιστες αποδόσεις μπορεί να είναι μια σχετικά απλή διαδικασία έως κάτι δύσκολο ή και αδύνατον. Όμως η αναζήτηση της βέλτιστης θεωρίας και ακολούθως της καλής υλοποίησης είναι τα συστατικά που προσελκύουν την προσοχή των ατόμων που ασχολούνται με αυτόν τον τομέα και προσπαθούν συνεχώς για την επίτευξη του καλύτερου αποτελέσματος. Επομένως προέκυψε αυτό το θέμα της διπλωματικής μέσα από τον χώρο της παραλληλίας που με την στήριξη του καθηγητή μου κ. Νικόλαο Μισυρλή κατάφερα να την ολοκληρώσω και να αποκτήσω αρκετές απαραίτητες γνώσεις.

## Κεφάλαιο 1

### Εισαγωγή

#### 1.1 Το πρόβλημα της εξισορρόπησης φορτίου

Ζούμε στην εποχή της τεχνολογικής εξέλιξης, όλο και καλύτεροι επεξεργαστές κυκλοφορούν ανά διαστήματα με αποτέλεσμα να αυξάνεται η υπολογιστή ισχύς με επακόλουθο να λύνουμε τα προβλήματά μας πιο γρήγορα. Όμως όσο γρήγορος και να είναι ένας επεξεργαστής, όταν μελετάμε μεγάλα προβλήματα Μαθηματικών και Φυσικής, δεν αρκεί. Σε αυτό το σημείο εισέρχεται η παραλληλία στον τρόπο επίλυσης των προβλημάτων μας, όπου έχουν αναπτυχθεί αρκετές θεωρίες και τεχνικές για να μας βοηθήσουν να λύσουμε ένα μεγάλο πρόβλημα με πολλούς επεξεργαστές, μοιράζοντας τους υπολογισμούς μας. Παρόλο που η παραλληλία μας βοηθάει αρκετά στην επίλυση, υπάρχει περίπτωση αναλόγως το πρόβλημά μας, να επιδέχεται βελτίωση ο τρόπος που προσεγγίζουμε την επίλυση.

Σε κάθε παράλληλο αλγόριθμο που υλοποιούμε, θέλουμε όλοι οι επεξεργαστές να δουλεύουν σχεδόν τον ίδιο χρόνο ώστε να μην υπάρχει κάποιος επεξεργαστής του οποίου έχει τερματίσει η διαδικασία, που του έχει ανατεθεί και κάποιοι άλλοι να συνεχίζουν ακόμα. Σε μια τέτοια περίπτωση σημαίνει ότι δεν θα έχουμε την αναμενόμενη απόδοση από τον αλγόριθμό μας και για αυτό πρέπει να σχεδιαστεί με τέτοιο τρόπο ώστε να μοιράζει κατάλληλα το αρχικό φορτίο για να αντιμετωπιστούν τέτοια φαινόμενα. Έτσι έχουμε την έννοια της εξισορρόπησης φορτίου (load balancing). Θα δούμε στην παρούσα εργασία μια τεχνική για εξισορρόπηση φορτίου ενώ έχουμε επεξεργαστές με διαφορετική ταχύτητα (heterogeneous) και διαφορετικό δίκτυο διασύνδεσης. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της διάχυσης για εξισορρόπηση φορτίου [13],[14].

## 1.2 Διαφορετικά μοντέλα εξισορρόπησης φορτίου

Έχουμε τα ακόλουθα μοντέλα εξισορρόπησης φορτίου:

- Κεντροποιημένα – Κατανεμημένα μοντέλα

Στο κεντροποιημένο μοντέλο έχουμε έναν επεξεργαστή που περιέχει πληροφορίες για όλους τους επεξεργαστές. Στο κατανεμημένο μοντέλο κάθε επεξεργαστής έχει μια διαδικασία και χρησιμοποιεί μόνο τοπικές πληροφορίες.

- Στατικά – Δυναμικά μοντέλα

Στα στατικά μοντέλα έχουμε προκαθορισμένο φορτίο στο δίκτυο και δεν αυξάνεται ούτε μειώνεται. Στα δυναμικά μοντέλα έχουμε αυξομειώσεις φορτίων.

- Σύγχρονα – Ασύγχρονα μοντέλα

Στα σύγχρονα μοντέλα ο κάθε επεξεργαστής εκτελεί τη διαδικασία τοπικά και συγχρονίζεται με τους άλλους επεξεργαστές. Στα σύγχρονα μοντέλα δεν έχουμε τέτοιου είδους συγχρονισμό.

Το μοντέλο που θα υιοθετήσουμε είναι κατανεμημένο, στατικό και σύγχρονο.

## 1.3 Αλγόριθμοι εξισορρόπησης φορτίου

Οι αλγόριθμοι εξισορρόπησης φορτίου μπορούν να διαχωριστούν στους πιο γειτονικούς (nearest neighbor) και στους καθολικούς (global). Οι γειτονικές μέθοδοι βασίζονται σε μια ικανοποιητική προσέγγιση της ιδανικής καθολικής κατανομής φορτίου και οπότε απλά σε κάθε επανάληψη ενδιαφέρονται μόνο προς ποια διεύθυνση μεταφέρεται το φορτίο. Είναι επαναληπτικοί μέθοδοι και επιδιώκουν να δημιουργήσουν ισορροπία σε κάθε γειτονιά, ώστε να έχουμε καθολική ισορροπία στο τέλος. Επειδή αυτή η μέθοδος δεν απαιτεί να γνωρίζουμε καθολικά την κατάσταση του μοντέλου, μπορούμε να χρησιμοποιούμε πολλές παράλληλες μηχανές χωρίς επιβάρυνση. Κάποιες μέθοδοι θα επέλεγαν μια κατεύθυνση, ενώ άλλες μέθοδοι όλες τις διευθύνσεις. Αυτές

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

Οι μέθοδοι μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε αιτιοκρατικές (deterministic) και στοχαστικές (stochastic) μέθοδοι σύμφωνα με τον κανόνα που γίνεται κατανομή το φορτίο. Οι αιτιοκρατικές μέθοδοι προχωράνε σύμφωνα με προκαθορισμένους κανόνες κατανομής. Για το ποιος επεξεργαστής θα μεταφέρει φορτίο και τι ποσότητα εξαρτάται από παραμέτρους των κανόνων όπως η κατάσταση των γειτονικών επεξεργαστών. Οι στοχαστικές μέθοδοι κατανέμουν τα φορτία τους σε τυχαία φάση με βάση το αποτέλεσμα που θέλουν να πετύχουν. Οι αιτιοκρατικές μέθοδοι διακρίνονται σε τρεις κατηγορίες:

- Διάχυσης (Diffusion)

Σε αυτή την μέθοδο ο κάθε επεξεργαστής εξισορροπεί το φορτίο του με όλους τους γειτονικούς του επεξεργαστές. Επομένως ο επεξεργαστής στέλνει ένα ποσοστό από το υπολογιστό του φορτίο σε όσους γείτονες απαιτείται και λαμβάνει φορτίο από τους γείτονές του.

- Ανταλλαγής Διάστασης (Dimension exchange)

Ο κάθε επεξεργαστής στέλνει και λαμβάνει κάποιο ποσοστό του φορτίου του μόνο από έναν γείτονά του κάθε φορά. Γίνεται σειριακά για κάθε γείτονα και χρειάζεται να εκτελεστεί για κάθε γείτονα.

- Κατεύθυνσης (Gradient)

Μεταφέρονται φορτία προς την κατεύθυνση με τους επεξεργαστές που έχουν μικρότερο φορτίο.

Οι στοχαστικές μέθοδοι διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:

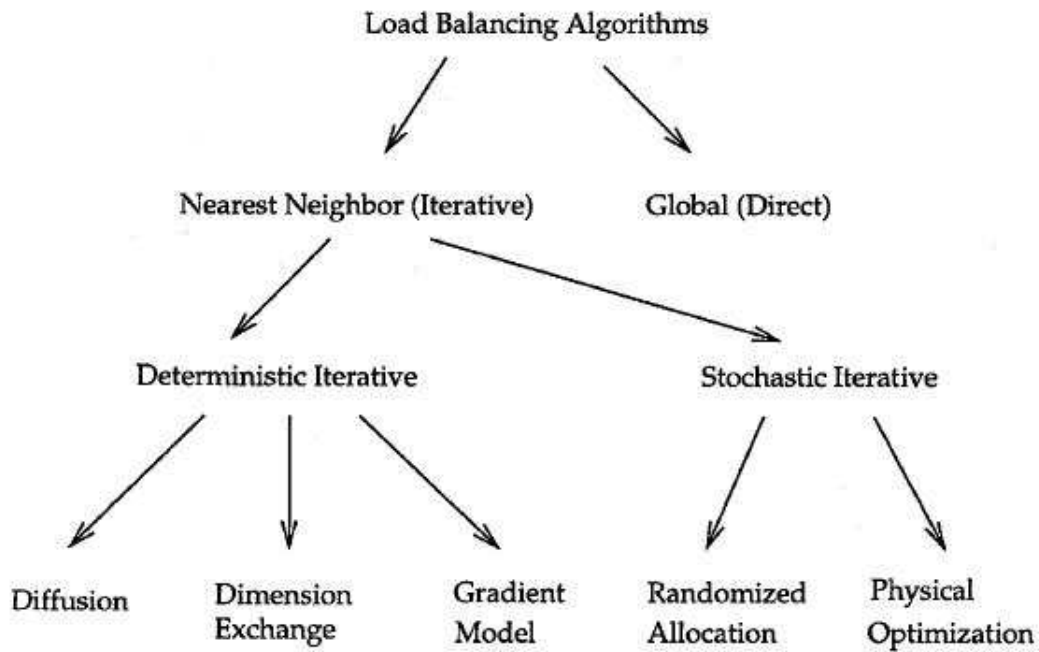
- Τυχαίας κατανομής (Randomized allocation)

Κάθε φορά που δημιουργείται μια νέα διεργασία μεταφέρεται σε έναν επεξεργαστή τυχαία (συνήθως γειτονικός). Αν ο επεξεργαστής είναι ήδη απασχολημένος τότε στέλνει τη διεργασία σε άλλο επεξεργαστή.

- Φυσικής βελτιστοποίησης (Physical optimization)

Οι αλγόριθμοι φυσικής βελτιστοποίησης απεικονίζουν το πρόβλημα εξισορρόπησης φορτίου σε μερικά φυσικά συστήματα και λύνουν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας προ-

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος



Σχήμα 1.1: Αλγόριθμοι εξισορρόπησης φορτίου

σομοίωση ή τεχνικές από θεωρητική ή πειραματική φυσική.

Εμείς θα ασχοληθούμε με τη μέθοδο της Διάχυσης, η οποία διενεργεί με ανταλλαγή φορτίων με όλους τους γείτονες.

## Κεφάλαιο 2

### Η Μέθοδος της διάχυσης

#### 2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την μέθοδο της διάχυσης. Η μέθοδος της Διάχυσης (Diffusion) προήλθε από την φύση, μελετώντας τον τρόπο που εξομαλύνει κάποιες διαταραχές που δημιουργούνται. Σε αυτή την μέθοδο κάθε επεξεργαστής μεταφέρει φορτίο ταυτόχρονα σε όλους τους γειτονικούς επεξεργαστές του. Για να μπορέσουμε να περιγράψουμε την μέθοδο πρέπει να μοντελοποιήσουμε το πρόβλημα. Θεωρούμε έναν αυθαίρετο, μη κατευθυνόμενο, συνδεδεμένο γράφο  $G = (V, E)$ . Ο γράφος παριστάνει το δίκτυο των επεξεργαστών μας, με  $v_i \in V$  είναι οι κόμβοι του (επεξεργαστές) και όταν δύο επεξεργαστές  $i, j$  συνδέονται με το δίκτυο διασύνδεσης, τότε  $(v_i, v_j) \in E$ . Κατανέμουμε ένα φορτίο  $u_i \in \mathbb{R}^+$  σε κάθε κόμβο, το οποίο είναι το υπολογιστικό φορτίο του  $v_i$ . Επιθυμούμε να βρούμε τον τρόπο μετακίνησης ενός ποσού του υπολογιστικού φορτίου μέσω των ακμών ώστε το τελικό φορτίο να είναι κατά προσέγγιση ίσο. Πόσο καλός είναι ένας επαναληπτικός αλγόριθμος εξισορρόπησης φορτίου το διαπιστώνουμε από το πλήθος των επαναλήψεων μέχρι να επέλθει σε ισορροπία και από την ποσότητα φορτίου που μετακινήθηκε από τις ακμές του γράφου. Η μεταφορά φορτίου είναι επίπονη και έχει κόστος για αυτό προσπαθούμε να την περιορίσουμε. Στον αλγόριθμο της διάχυσης μεταφέρουμε κατά μήκος της ακμής  $(v_i, v_j)$  του γράφου  $G$  ένα μέρος της διαφοράς μεταξύ των φορτίων  $u_i$  και  $u_j$ ,  $\tau_{ij}(u_j - u_i)$ . Αφού επαναλάβουμε αυτή τη διαδικασία, με την προϋπόθεση βέβαια ότι η επιλογή της παραμέτρου  $\tau_{ij}$  είναι τέτοια ώστε να συγκλίνει η μεθοδος, τότε κταλήγουμε σε μία τελική κατάσταση με ισοκατανεμημένα φορτία, με το εξής σχήμα:

$$u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} + \sum_{j \in A(i)} \tau_{ij}(u_j^{(n)} - u_i^{(n)}), \quad (2.1)$$

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

Σε αυτό τον τύπο συμβολίζουμε με  $u_i^{(n)}$  την τιμή του φορτίου  $u_i$  στην  $n$  επανάληψη και με  $A(i)$  το σύνολο των γειτόνων του επεξεργαστή  $v_i$ . Ορίζουμε το διάνυσμα  $u^{(n)}$  της συνολικής κατανομής του φορτίου στους επεξεργαστές κατά την επανάληψη  $n$ , ως εξής:  $u^{(n)} = [u_1^{(n)} u_2^{(n)} \dots u_{|V|}^{(n)}]^T$ . Σε αυτή την περίπτωση το σχήμα (2.1) μετατρέπεται στην ακόλουθη μορφή πινάκων:

$$u^{(n+1)} = Mu^{(n)} \quad (2.2)$$

Ο πίνακας  $M$  ονομάζεται επαναληπτικός πίνακας του αλγορίθμου της διάχυσης και προκύπτει άμεσα από τον τύπο (2.1), δίνεται δε από τον τύπο:

$$m_{ij} = \begin{cases} \tau_{ij}, & \alpha\nu j \in A(i) \\ 1 - \sum_{k \in A(i)} \tau_{ik}, & \alpha\nu j = i, \\ 0, & \text{διαφορετικά,} \end{cases} \quad (2.3)$$

Αποδεικνύεται ότι ο  $M$  είναι μη αρνητικός, συμμετρικός και διπλά στοχαστικός πίνακας οπότε και η μέθοδος (2.2) συγκλίνει όπως έχουν αποδείξει ο Cybenko [3] και ο Boillat [1]. Αυτή η μέθοδος που ορίσαμε στην (2.2) είναι η μέθοδος της Διάχυσης (ΔΧ). Έστω  $\mu_j, 1 \leq j \leq |V|$  είναι οι ιδιοτιμές του  $M$  και  $\rho(M), \gamma(M)$  η φασματική ακτίνα και η αμέσως μικρότερη κατά μέτρο ιδιοτιμή, τότε έχουμε  $\rho(M) = 1$  ([1] [2]) άρα η ταχύτητα σύγκλισης εξαρτάται μόνο από τη  $\gamma(M)$ .

## 2.2 Η μέθοδος της Επιταχυντικής Διάχυσης (ΕΔΧ)

Στην παρούσα εργασία εφαρμόζουμε την προσέγγιση [9] για να βρούμε τη βέλτιστη μέθοδο της Διάχυσης για ετερογενή δίκτυα και συγκεκριμένα για δισδιάστατο πλέγμα (δισδιάστατο mesh) και δισδιάστατο-αναδιπλούμενο πλέγμα (δισδιάστατο torus). Τα ετερογενή δίκτυα αποτελούνται από επεξεργαστές με διαφορετικές ταχύτητες, και διαφορετικό δίκτυο διασύνδεσης μεταξύ των επεξεργαστών. Στις [7], [8] προτείνεται μια υδρο-δυναμική προσέγγιση για ένα ετερογενές περιβάλλον που χαρακτηρίζεται από

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

διαφορετικές ταχύτητες επεξεργαστών και ομοιόμορφη επικοινωνία. Επιπλέον στην [12] θεωρούνται πεπλεγμένα σχήματα Διάχυσης, όπου στην [4] τα σχήματα διάχυσης για ένα υπολογιστικό περιβάλλον χαρακτηρίζονται από ομοιόμορφη ταχύτητα επεξεργαστών και διαφορετικό δίκτυο διασύνδεσης. Στις [5], [10], [11] αυτά τα σχήματα επεκτείνονται για ετερογενή υπολογιστικά περιβάλλοντα λαμβάνοντας υπόψιν τόσο την υπολογιστική απόδοση όσο και στην ταχύτητα επικοινωνίας. Σε όλα τα παραπάνω σχήματα οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων που εμπλέκονται υπολογίζονται μέσω των ιδιοτιμών του Λαπλασιανού (Laplacian) του γράφου επικοινωνίας εκτός από τα [10], [11], όπου χρησιμοποιούνται εμπειρικοί τύποι. Ωστόσο είναι πολύ χρονοβόρο να υπολογίζουμε αριθμητικά ιδιοτιμές. Για αυτό είναι πολύ σημαντικό να προσδιορίσουμε βέλτιστες τιμές για τις παραμέτρους που εμπλέκονται στην ΔΧ χρησιμοποιώντας κλειστούς τύπους ώστε να (i) μεγιστοποιήσουμε τον ρυθμό σύγκλισης και (ii) να κάνουμε πιο αποδοτική την διαδικασία ανακατανομής του φορτίου λόγω αλλαγών στον γράφο επικοινωνίας.

Ακολουθώντας μια παρόμοια προσέγγιση με την [9], μπορούμε να βρούμε έναν κλειστό τύπο για το σύνολο των παραμέτρων της τοπικής ΕΔΧ (2.1) με την προοπτική ότι μεγιστοποιείται ο ρυθμός σύγκλισης για ετερογενή αναδιπλούμενα πλέγματα. Αυτές οι βέλτιστες τιμές εξαρτώνται μόνο από την ταχύτητα των γειτονικών επεξεργαστών και από τα βάρη επικοινωνίας των ακμών, οπότε απαιτείται μόνο τοπική επικοινωνία.

### 2.2.1 Μη ομογενές δίκτυο

Έστω  $G = (V, E)$  ένας συνδεδεμένος, μη κατευθυνόμενος γράφος με  $|V|$  κόμβους και  $|E|$  ακμές, που αντιστοιχεί στο δίκτυο των επεξεργαστών. Επίσης  $w_{ij} > 0 \in \mathbb{R}$  είναι τα βάρη των ακμών  $e_{ij} \in E$  που σχετίζονται με την χωρητικότητα του δικτύου επικοινωνίας και  $s_i > 0 \in \mathbb{R}$  είναι η ταχύτητα του επεξεργαστή  $i$  με φορτίο  $v_i \in V$ .

Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο επαναληπτικό σχήμα που απαιτεί επικοινωνία μεταξύ των γειτονικών κόμβων μόνο

$$u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} - \tau \sum_{j \in A(i)} c_{ij} w_{ij} \left( \frac{u_i^{(n)}}{s_i} - \frac{u_j^{(n)}}{s_j} \right), \quad (2.4)$$

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

όπου  $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  είναι η παράμετρος επιτάχυνσης,  $c_{ij} > 0$  είναι οι παράμετροι διάχυσης που πρέπει να προσδιορίσουμε. Το επαναληπτικό σχήμα (2.4) θα αναφέρεται ως η μέθοδος της Επιτάχυνσης της Διάχυσης (ΕΔΧ) μέθοδος. Ο στόχος μας είναι να καθορίσουμε το ποσό του φορτίου που μεταφέρεται μεταξύ των επεξεργαστών στον γράφο επικοινωνίας έτσι, ώστε να εξισορροπήσουμε το φορτίο αναλογικά προς την ταχύτητα του κάθε επεξεργαστή και του δίκτυου διασύνδεσης. Για αυτό, το  $\bar{u}_i = (\sum_{j=1}^{|V|} u_j^{(0)}) / (\sum_{j=1}^{|V|} s_j) s_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, |V|$  δηλώνει το εξισορροπημένο φορτίο σε κάθε επεξεργαστή. Ο τύπος (2.4) γίνεται

$$u^{(n+1)} = M u^{(n)}, \quad (2.5)$$

όπου  $M$  είναι ο πίνακας διάχυσης. Τα στοιχεία του  $M$ ,  $m_{ij}$ , είναι ίσα με  $\tau c_{ij} \frac{w_{ij}}{s_j}$ , αν  $j \in A(i)$ ,  $1 - \tau \sum_{j \in A(i)} c_{ij} \frac{w_{ij}}{s_i}$ , αν  $i = j$  και 0 διαφορετικά. Με αυτή την διατύπωση, τα χαρακτηριστικά της εξισορρόπησης φορτίου είναι πλήρως ενσωματωμένα στην επαναληπτική διαδικασία (2.4) που δημιουργούνται από τον πίνακα διάχυσης  $M$ . Ο πίνακας διάχυσης της ΕΔΧ μπορεί να γραφτεί ως

$$M = I - \tau L, \text{ όπου } L = D - A \quad (2.6)$$

όπου  $D = \text{diag}(L)$ . Από (2.6) και (2.5) έχουμε

$$(1 - \tau \sum_j c_{ij} \frac{w_{ij}}{s_i}) + \tau \sum_j c_{ij} \frac{w_{ij}}{s_j} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, |V| \quad (2.7)$$

Ο πίνακας διάχυσης  $M$  πρέπει να έχει τις ακόλουθες ιδιότητες [3], [1]: μη αρνητικός, συμμετρικός και στοχαστικός. Η δεύτερη ιδιότητα ισχύει, για την πρώτη ιδιότητα, έχουμε το ακόλουθο.

**Λήμμα 2.2.1** Αν  $0 < \tau \leq 1/\|A\|_\infty$ , τότε  $M \geq 0$ .

Για να είναι ο πίνακας  $M$  στοχαστικός και συγκεκριμένα στοχαστικός κατά γραμμές, πρέπει

$$\sum_j m_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, |V| \quad (2.8)$$

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

ή

$$(1 - \tau \sum_j c_{ij} \frac{w_{ij}}{s_i}) + \tau \sum_j c_{ij} \frac{w_{ij}}{s_j} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, |V| \quad (2.9)$$

■

Μία λύση της (2.9) είναι η  $s_i = s_j$  και η ετερογενής διάχυση γίνεται (δες (2.4)):

$$u_i^{(n+1)} = u_i^{(n)} - \tau \sum_{j \in A(i)} \tilde{c}_{ij} (u_i^{(n)} - u_j^{(n)}), \quad (2.10)$$

όπου

$$\tilde{c}_{ij} = \frac{c_{ij} w_{ij}}{s_j}, \quad (2.11)$$

Όμως ο τύπος (2.10) είναι ίδιος η ομογενής ΔΧ μέθοδος (δες (1) στην [9]) όπου τώρα αντί για την αποκλειστική χρήση της παραμέτρου  $c_{ij}$  έχουμε την  $\tilde{c}_{ij}$  που δίνεται από την (2.11) και περιλαμβάνει την χωρητικότητα του δικτύου διασύνδεσης καθώς και τις ταχύτητες των επεξεργαστών. Ακολουθώντας την θεωρία της [9] έχουμε τα ακόλουθα.

## 2.3 Ανάλυση σύγκλισης της ΕΔΧ μεθόδου

Σε αυτή την παράγραφο θα παρουσιάσουμε το βασικό θεώρημα σύγκλισης για την ΕΔΧ μέθοδο.

**Θεώρημα 2.3.1** *Η ΕΔΧ μέθοδος συγκλίνει στην ομοιόμορφη κατανομή αν και μόνο αν ο γράφος του δικτύου είναι συνδεδεμένος και είτε μία (ή και οι δύο) των ακόλουθων συνθηκών ισχύουν: (i)  $0 < \tau < 1/\|A\|_\infty$ , (ii) ο γράφος του δικτύου δεν είναι διμερές.*

**Αποδειξη .** Ο πίνακας διάχυσης  $M$  μπορεί να λάβει την ακόλουθη μορφή  $M = \begin{bmatrix} 0 & K \\ K^T & 0 \end{bmatrix}$ , όπου τα μηδενικά χρησιμοποιούνται για να δηλώσουμε τους μηδενικούς πίνακες στη διαγώνιο του  $M$  και  $K$  είναι ορθογώνιος μη αρνητικός πίνακας, αν και μόνο αν είναι διμερές και  $I - \tau D = 0$  ή  $\tau = \frac{1}{\sum_{j \in A(i)} \tilde{c}_{ij}} \quad \forall i \in V$ . Αν ισχύει το παραπάνω,

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

τότε το  $-1$  είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα  $M$ , οπότε ο παράγων σύγκλισης  $\gamma(\tilde{M}) = 1$  και η μέθοδος δεν συγκλίνει. Αν ο γράφος  $G$  είναι διμερής, τότε για τουλάχιστον ένα  $i$

$$0 < \tau < \frac{1}{\frac{1}{s_i} \sum_{j \in A(i)} \tilde{c}_{ij}} \quad (2.12)$$

ή  $0 < \tau < \frac{1}{\max_i \frac{1}{s_i} \sum_{j \in A(i)} \tilde{c}_{ij}}$ , η οποία είναι η συνθήκη (i), το  $-1$  δεν είναι ιδιοτιμή του  $\tilde{M}$ , οπότε  $\gamma < 1$  (η μέθοδος ΕΔΧ συγκλίνει). ■

Ως συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος έχουμε τα ακόλουθα.

**Πόρισμα 2.3.2** Η μέθοδος ΔΧ συγκλίνει στην ομοιόμορφη κατανομή αν και μόνο αν ο γράφος του δικτύου είναι συνδεδεμένος και είτε μία (ή και οι δύο) ακόλουθες συνθήκες ισχύουν:

- (i)  $\sum_{j \in A(i)} c_{ij} < 1$ , για τουλάχιστον ένα  $i$ .
- (ii) ο γράφος του δικτύου δεν είναι διμερής.

Το πόρισμα 2.3.2 είναι το βασικό θεώρημα σύγκλισης για την μέθοδο ΔΧ που ορίστηκε από τον Cybenko [3]. Πριν κλείσουμε αυτή την ενότητα θεωρούμε την ακόλουθη έκδοση της ΕΔΧ που περιλαμβάνει ένα σύνολο παραμέτρων  $\tau_i, i = 1, 2, \dots, |V|$

$$u_i^{(n+1)} = (1 - \tau_i \sum_{j \in A(i)} c_{ij} \frac{w_{ij}}{s_i}) u_i^{(n)} + \tau_i \sum_{j \in A(i)} c_{ij} \frac{w_{ij}}{s_j} u_j^{(n)}, i = 1, 2, \dots, |V|. \quad (2.13)$$

Αν  $\tau_i = \tau$  για κάθε  $i = 1, 2, \dots, |V|$ , τότε (2.13) ανάγεται στην μέθοδο ΕΔΧ. Το επαναληπτικό σχήμα (2.13) θα αναφέρεται ως η τοπική μη ομογενής μέθοδος της ΕΔΧ.

## Κεφάλαιο 3

### Το Αναδιπλούμενο Πλέγμα (Torus)

#### 3.1 Προσδιορισμός βέλτιστων τιμών των παραμέτρων

Το σχήμα της τοπικής ΕΔΧ στον κόμβο  $(i, j)$  μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$u_{ij}^{(n+1)} = M_{ij}u_{ij}^{(n)}, \quad (3.1)$$

όπου  $M_{ij} = 1 - \tau_{ij}L_{ij}$  ο τελεστής της τοπικής ΕΔΧ για ένα  $N_1 \times N_2$  αναδιπλούμενο πλέγμα. Έπειτα, επιβάλλουμε την λεξικογραφική διάταξη των κόμβων και ορίζουμε  $L_{ij} = d_{ij} - (\tilde{c}_{i+1,j}E_1 + \tilde{c}_{i-1,j}E_1^{-1} + \tilde{c}_{i,j+1}E_2 + \tilde{c}_{i,j-1}E_2^{-1})$  ο τοπικός τελεστής του Laplacian πίνακα, με  $d_{ij} = \tilde{c}_{i+1,j} + \tilde{c}_{i-1,j} + \tilde{c}_{i,j+1} + \tilde{c}_{i,j-1}$ , όπου  $\tilde{c}_{i-1,j}$ ,  $\tilde{c}_{i+1,j}$ ,  $\tilde{c}_{i,j-1}$  και  $\tilde{c}_{i,j+1}$  ορίζουν τα βάρη των ακμών του νότιου, βορείου, δυτικού, ανατολικού κόμβου  $(i, j)$ . Οι συντελεστές  $E_1, E_1^{-1}, E_2, E_2^{-1}$  ορίζονται ως εξής  $E_1u_{ij} = u_{i+1,j}$ ,  $E_1^{-1}u_{ij} = u_{i-1,j}$ ,  $E_2u_{ij} = u_{i,j+1}$ ,  $E_2^{-1}u_{ij} = u_{i,j-1}$ , οι οποίοι είναι προς τα εμπρός τελεστής μετατόπισης forward-shift και προς τα πίσω τελεστής μετατόπισης backward-shift στην  $x_1$ -κατεύθυνση, ( $x_2$ -κατεύθυνση), αντίστοιχα με  $u_{ij} = u(ih_1, jh_2) = u(x_1, x_2)$ , όπου  $x_1 = ih_1$ ,  $x_2 = jh_2$ ,  $h_1 = \frac{1}{N_1}$  και  $h_2 = \frac{1}{N_2}$ . Αφού ο πίνακας Laplacian  $L$  είναι συμμετρικός τότε  $\tilde{c}_{i+1,j} = \tilde{c}_{i-1,j}$  και  $\tilde{c}_{i,j+1} = \tilde{c}_{i,j-1}$ . Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς για τα βάρη των ακμών

$$\tilde{c}_i^{(1)} = \tilde{c}_{i+1,j} \text{ και } \tilde{c}_j^{(2)} = \tilde{c}_{i,j+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1, \quad j = 1, 2, \dots, N_2. \quad (3.2)$$

Τότε,  $L_{ij} = d_{ij} - \tilde{c}_i^{(1)}(E_1 + E_1^{-1}) + \tilde{c}_j^{(2)}(E_2 + E_2^{-1})$ , όπου  $d_{ij} = 2(\tilde{c}_i^{(1)} + \tilde{c}_j^{(2)})$ . Οι ιδιοτιμές  $\mu_{ij}$ ,  $\lambda_{ij}$  των τοπικών τελεστών των  $M_{ij}, L_{ij}$ , αντίστοιχα, σχετίζονται ως εξής:  $\mu_{ij} = 1 - \tau_{ij}\lambda_{ij}$ .

**Λήμμα 3.1.1** Η φασματική ακτίνα του τελεστή  $L_{ij}$  δίνεται από την

$$\lambda_{ij}(k_1, k_2) = 2[\tilde{c}_{ij}^{(1)}(1 - \cos k_1 h_1) + \tilde{c}_{ij}^{(2)}(1 - \cos k_2 h_2)], \quad (3.3)$$

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

όπου  $i = 1, 2, \dots, N_1$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_2$ ,  $k_1 = 2\pi\ell_1$ ,  $\ell_1 = 0, 1, 2, \dots, N_1 - 1$ ,  $k_2 = 2\pi\ell_2$   
και  $\ell_2 = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1$ .

**Αποδειξη .** Αν μία ιδιοσυνάρτηση του τοπικού τελεστή  $L_{ij}$  είναι η μιγαδική ημιτονοειδής  $e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}$ , έχουμε ότι  $L_{ij}e^{i(k_1x_1+k_2x_2)} = \lambda_{ij}(k_1, k_2)e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}$ , όπου

$$\lambda_{ij}(k_1, k_2) = d_{ij} - [\tilde{c}_i^{(1)}(e^{ik_1h_1} + e^{-ik_1h_1}) + \tilde{c}_j^{(2)}(e^{ik_2h_2} + e^{-ik_2h_2})] \quad (3.4)$$

με  $d_{ij} = 2(\tilde{c}_i^{(1)} + \tilde{c}_j^{(2)})$ . Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε την  $e^{i(k_1x_1+k_2x_2)}$  σαν ιδιοσυνάρτηση του  $L_{ij}$  με ιδιοτιμές  $\lambda_{ij}(k_1, k_2)$  που δίνονται από την (3.4). Εύκολα διαπιστώνεται ότι η (3.4) παράγει την (3.3). ■

Ο ρυθμός σύγκλισης της μεθόδου ΕΔΧ εξαρτάται από τον παράγοντα σύγκλισης  $\gamma(M)$ , ο οποίος είναι η δεύτερη μεγαλύτερη ιδιοτιμή κατά απόλυτη τιμή του πίνακα  $M$ . Ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία ορίζουμε τον συντελεστή σύγκλισης  $\gamma_{ij}$  του τελεστή  $M_{ij}$  σαν τη δεύτερη μεγαλύτερη ιδιοτιμή σε απόλυτη τιμή του  $M_{ij}$ . Η ανωτέρω προσέγγιση γνωστή ως τοπική ανάλυση κατά Fourier έχει δύο εικασίες. Πρώτον, ο  $M_{ij}$  πρέπει να είναι ανεξάρτητος των χωρικών μεταβλητών space-invariant. Δεύτερον, το πεδίο ολοκλήρωσης πρέπει είτε να επεκταθεί στο άπειρο ή να γίνει ορθογώνιο με Dirichlet ή περιοδικές συνοριακές συνθήκες. Στην περίπτωση μας η  $\gamma_{ij}$  είναι μια χωρικά μεταβαλλόμενη συνάρτηση (δες (3.3) ) και γενικά δεν είναι ίση με τον παράγοντα σύγκλισης  $\gamma(M)$  της μεθόδου ΕΔΧ. Παρ'όλα αυτά, αν όλα τα βάρη των ακμών είναι ίσα με μια σταθερή τιμή, τότε ο  $M_{ij}$  και οπότε και ο  $\gamma_{ij}$  είναι ανεξάρτητα του χώρου και σε αυτή την περίπτωση το  $\gamma_{ij}$  είναι ίσο με το  $\gamma(M)$ . Αυτό διαπιστώνεται από το γεγονός ότι στην περίπτωση της ΔΧ χωρίς βάρη  $c_i^{(1)}=c_j^{(2)}=\frac{1}{4}$ , για κάθε  $i = 1, 2, \dots, N_1, j = 1, 2, \dots, N_2$  η (3.3) γίνεται

$$\lambda_{ij}(k_1, k_2) = 2 - \cos k_1h_1 - \cos k_2h_2, \quad (3.5)$$

η οποία είναι ίση με τις ιδιοτιμές του Laplacian πίνακα  $L$ , που βρέθηκε στην [13] χρησιμοποιώντας ανάλυση πινάκων. Οπότε

$$\gamma_{ij}(M_{ij}) = \max_{k_1, k_2} |\mu_{ij}(k_1, k_2)|, \quad (3.6)$$

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

όπου δεν γίνεται και τα δύο  $k_1, k_2$  να λάβουν μηδενική τιμή.

Έχουμε

$$\mu_{ij} = 1 - \tau_{ij} \lambda_{ij} \quad (3.7)$$

προκύπτει ότι η ελάχιστη τιμή της  $\gamma_{ij}$  σε συνάρτηση με το  $\tau_{ij}$  βρίσκεται όταν [6]

$$\tau_{ij}^{opt} = \frac{2}{\lambda_{i,j,2} + \lambda_{i,j,N}}, \quad (3.8)$$

όπου  $\lambda_{i,j,2}, \lambda_{i,j,N}$  είναι οι μικρότερες και οι μεγαλύτερες ιδιοτιμές του τελεστή  $L_{ij}$ , αντίστοιχα. Επιπλέον, η αντίστοιχη τιμή του  $\gamma_{ij}(M_{ij})$  δίνεται από την

$$\gamma_{ij}^{opt} = \frac{P_{ij} - 1}{P_{ij} + 1}, \quad (3.9)$$

όπου

$$P_{ij} = \frac{\lambda_{i,j,N}}{\lambda_{i,j,2}} \quad (3.10)$$

είναι ο P αριθμός συνθήκης του  $L_{ij}$ . Η τελευταία ποσότητα παίζει σημαντικό ρόλο στην συμπεριφορά του  $\gamma_{ij}^{opt}$ . Από την (3.9) προκύπτει ότι το  $\gamma_{ij}^{opt}$  είναι μία αύξουσα συνάρτηση του  $P_{ij}$ . Η ελαχιστοποίηση του  $P_{ij}$  έχει ως αποτέλεσμα την μεγιστοποίηση του  $R(LED F)$ , του ρυθμού σύγκλισης της τοπικής ΕΔΧ μεθόδου, που ορίζεται από την

$$R(LED F) = -\log \gamma_{ij}^{opt}. \quad (3.11)$$

Μια σημαντική ερώτηση που πρέπει να απαντηθεί είναι αν η γνώση του  $\lambda_{i,j,N}$  και του  $\lambda_{i,j,2}$  μπορούν να μας παρέχουν χρήσιμες πληροφορίες για την φασματική ακτίνα του Laplacian πίνακα και συγκεκριμένα για τα  $\lambda_N$  και  $\lambda_2$ , τη μεγαλύτερη και μικρότερη ιδιοτιμή του Laplacian πίνακα, αντίστοιχα. Τέτοια πληροφορία θα ήταν πολύ χρήσιμη αφού θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε το  $\gamma(M)$  και οπότε να εκτιμήσουμε τον ρυθμό σύγκλισης της ΕΔΧ μεθόδου. Δύο παρατηρήσεις που μπορούν να βοηθήσουν για να απαντηθεί το παραπάνω. Πρώτον, συγκεκριμένες τιμές των  $k_1, k_2$  στην (3.3) θα δώσουν την μικρότερη ιδιοτιμή  $\lambda_{i,j,2}$  από όλους τους τοπικούς Laplacian τελεστές  $L_{ij}$ . Ένα ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει για το  $\lambda_{i,j,N}$  έτσι το  $k_1$  και  $k_2$  θα παίξουν έναν σημαντικό ρόλο. Επί πλέον, για δεδομένες τιμές των  $k_1$  και  $k_2$ , το  $\lambda_{i,j}$  είναι ευαίσθητο στις αλλαγές των παραμέτρων των βαρών των ακμών  $\tilde{c}_i^{(1)}$  και  $\tilde{c}_j^{(2)}$ . Ωστόσο, όπως αναφέρθηκε ανωτέρω, αν τα βάρη των ακμών είναι σταθερά, τότε η φασματική ακτίνα

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

του τοπικού Laplacian τελεστή συμπίπτει με αυτήν του Laplacian πίνακα. Στην πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση όπου τα βάρη των ακμών μεταβάλλονται σημαντικά, τότε η φασματική ακτίνα του τελεστή  $L_{ij}$  θα έπρεπε να είναι ένα υποσύνολο του  $L$ , καθώς οι ιδιοτιμές  $\lambda$  του  $L$  θα έπρεπε να είναι μεταξύ του  $\bar{\lambda}$  και  $\underline{\lambda}$ , όπου  $\underline{\lambda} = \min_{ij} \lambda_{i,j,2}$  και  $\bar{\lambda} = \max_{ij} \lambda_{i,j,N}$ .

**Θεώρημα 3.1.2** Ο παράγοντας σύγκλισης  $\gamma_{ij}(M_{ij})$  του τελεστή  $M_{ij}$  ελαχιστοποιείται στο  $\tau_{ij}^{opt}$  και το αντίστοιχο ελάχιστο είναι  $\gamma_{ij}^{opt}$ , όπως παρουσιάζεται στον πίνακα 3.1, όπου  $\sigma_{ij}$  και  $\sigma_2$  δίνονται από την (3.13).

$N_1, N_2$	Συνθήκη	Περίπτωση	$\tau_{ij}^{opt}$	$\gamma_{ij}^{opt}$
άρτιοι	$\sigma_{ij} \geq \sigma_2$	1	$[\tilde{c}_i^{(1)} (3 - \cos \frac{2\pi}{N_1}) + 2\tilde{c}_j^{(2)}]^{-1}$	$\frac{2\tilde{c}_j^{(2)} + \tilde{c}_i^{(1)} (1 + \cos \frac{2\pi}{N_1})}{2\tilde{c}_j^{(2)} + \tilde{c}_i^{(1)} (3 - \cos \frac{2\pi}{N_1})}$
	$\sigma_{ij} \leq \sigma_2$	2	$[\tilde{c}_j^{(2)} (3 - \cos \frac{2\pi}{N_2}) + 2\tilde{c}_i^{(1)}]^{-1}$	$\frac{2\tilde{c}_i^{(1)} + \tilde{c}_j^{(2)} (1 + \cos \frac{2\pi}{N_2})}{2\tilde{c}_i^{(1)} + \tilde{c}_j^{(2)} (3 - \cos \frac{2\pi}{N_2})}$
περιττοί	$\sigma_{ij} \geq \sigma_2$	3	$[\tilde{c}_i^{(1)} (2 + \cos \frac{\pi}{N_1} - \cos \frac{2\pi}{N_1}) + \tilde{c}_j^{(2)} (1 + \cos \frac{\pi}{N_2})]^{-1}$	$\frac{\tilde{c}_i^{(1)} (\cos \frac{\pi}{N_1} + \cos \frac{2\pi}{N_1}) + \tilde{c}_j^{(2)} (1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}{\tilde{c}_i^{(1)} (2 + \cos \frac{\pi}{N_1} - \cos \frac{2\pi}{N_1}) + \tilde{c}_j^{(2)} (1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}$
	$\sigma_{ij} \leq \sigma_2$	4	$[\tilde{c}_j^{(2)} (2 + \cos \frac{\pi}{N_2} - \cos \frac{2\pi}{N_2}) + \tilde{c}_i^{(1)} (1 + \cos \frac{\pi}{N_1})]^{-1}$	$\frac{\tilde{c}_j^{(2)} (\cos \frac{\pi}{N_2} + \cos \frac{2\pi}{N_2}) + \tilde{c}_i^{(1)} (1 + \cos \frac{\pi}{N_1})}{\tilde{c}_j^{(2)} (2 + \cos \frac{\pi}{N_2} - \cos \frac{2\pi}{N_2}) + \tilde{c}_i^{(1)} (1 + \cos \frac{\pi}{N_1})}$
περιττός, άρτιος	$\sigma_{ij} \geq \sigma_2$	5	$[\tilde{c}_i^{(1)} (2 + \cos \frac{\pi}{N_1} - \cos \frac{2\pi}{N_1}) + 2\tilde{c}_j^{(2)}]^{-1}$	$\frac{\tilde{c}_i^{(1)} (\cos \frac{\pi}{N_1} + \cos \frac{2\pi}{N_1}) + 2\tilde{c}_j^{(2)}}{\tilde{c}_i^{(1)} (2 + \cos \frac{\pi}{N_1} - \cos \frac{2\pi}{N_1}) + 2\tilde{c}_j^{(2)}}$
	$\sigma_{ij} \leq \sigma_2$	6	$[\tilde{c}_j^{(2)} (3 - \cos \frac{2\pi}{N_2}) + \tilde{c}_i^{(1)} (1 + \cos \frac{\pi}{N_1})]^{-1}$	$\frac{\tilde{c}_j^{(2)} (1 + \cos \frac{2\pi}{N_2}) + \tilde{c}_i^{(1)} (1 + \cos \frac{\pi}{N_1})}{\tilde{c}_j^{(2)} (3 - \cos \frac{2\pi}{N_2}) + \tilde{c}_i^{(1)} (1 + \cos \frac{\pi}{N_1})}$
άρτιος, περιττός	$\sigma_{ij} \geq \sigma_2$	7	$[\tilde{c}_i^{(1)} (3 - \cos \frac{2\pi}{N_1}) + \tilde{c}_j^{(2)} (1 + \cos \frac{\pi}{N_2})]^{-1}$	$\frac{\tilde{c}_i^{(1)} (1 + \cos \frac{2\pi}{N_1}) + \tilde{c}_j^{(2)} (1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}{\tilde{c}_i^{(1)} (3 - \cos \frac{2\pi}{N_1}) + \tilde{c}_j^{(2)} (1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}$
	$\sigma_{ij} \leq \sigma_2$	8	$[\tilde{c}_j^{(2)} (2 + \cos \frac{\pi}{N_2} - \cos \frac{2\pi}{N_2}) + 2\tilde{c}_i^{(1)}]^{-1}$	$\frac{\tilde{c}_j^{(2)} (\cos \frac{\pi}{N_2} + \cos \frac{2\pi}{N_2}) + 2\tilde{c}_i^{(1)}}{\tilde{c}_j^{(2)} (2 + \cos \frac{\pi}{N_2} - \cos \frac{2\pi}{N_2}) + 2\tilde{c}_i^{(1)}}$

Πίνακας 3.1: Τύποι για βέλτιστο  $\tau_{ij}$  και  $\gamma_{ij}$  σε δισδιάστατο αναδιπλούμενο πλέγμα

**Αποδειξη .** Η βέλτιστη τιμή για το  $\tau_{ij}$  θα βρεθεί από την (3.8), ενώ η ελάχιστη τιμή του  $\gamma_{ij}^{opt}$  από τις (3.9), (3.10). Είναι επίσης απαραίτητο να προσδιορίσουμε το  $\lambda_{i,j,2}$  και το  $\lambda_{i,j,N}$ . Για τον προσδιορισμό του  $\lambda_{i,j,2}$  έστω ότι  $l_1=0$  και  $l_2=1$ , ή  $l_1=1$  και  $l_2=0$  στην (3.3), αυτό μας δίνει  $\lambda_{i,j,2} = 2\tilde{c}_j^{(2)}(1 - \cos \frac{2\pi}{N_2})$  ή  $\lambda_{i,j,2} = 2\tilde{c}_i^{(1)}(1 - \cos \frac{2\pi}{N_1})$  για κάθε μία από τις παραπάνω επιλογές των  $l_1, l_2$ , που οδηγούν στο ακόλουθο

$$\lambda_{i,j,2} = \begin{cases} 2\tilde{c}_i^{(1)}(1 - \cos \frac{2\pi}{N_1}), & \sigma_{ij} \geq \sigma_2 \\ 2\tilde{c}_j^{(2)}(1 - \cos \frac{2\pi}{N_2}), & \sigma_{ij} \leq \sigma_2, \end{cases} \quad (3.12)$$

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

όπου

$$\sigma_{ij} = \frac{\tilde{c}_j^{(2)}}{\tilde{c}_i^{(1)}} \text{ and } \sigma_2 = \frac{1 - \cos \frac{2\pi}{N_1}}{1 - \cos \frac{2\pi}{N_2}}. \quad (3.13)$$

Η μέγιστη ιδιοτιμή  $\lambda_{i,j,N}$  προσδιορίζεται δίνοντας  $\ell_1 = \lceil \frac{N_1}{2} \rceil$  και  $\ell_2 = \lceil \frac{N_2}{2} \rceil$  στην (3.3). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις αναλόγως αν τα  $N_1, N_2$  είναι άρτιοι ή περιττοί.

Περίπτωση I :  $N_1, N_2$  άρτιοι

Σε αυτή την περίπτωση  $\ell_1 = \frac{N_1}{2}$  και  $\ell_2 = \frac{N_2}{2}$ , οπότε από την (3.3) έχουμε

$$\lambda_{i,j,N} = 4(\tilde{c}_i^{(1)} + \tilde{c}_j^{(2)}). \quad (3.14)$$

Περίπτωση II:  $N_1, N_2$  περιττοί

Σε αυτή την περίπτωση  $\ell_1 = \frac{N_1+1}{2}$  και  $\ell_2 = \frac{N_2+1}{2}$ , οπότε από την (3.3) έχουμε

$$\lambda_{i,j,N} = 2[\tilde{c}_i^{(1)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_1}) + \tilde{c}_j^{(2)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})]. \quad (3.15)$$

Περίπτωση III:  $N_1$  περιττό,  $N_2$  άρτιο

Σε αυτή την περίπτωση  $\ell_1 = \frac{N_1+1}{2}$  και  $\ell_2 = \frac{N_2}{2}$ , οπότε από την (3.3) έχουμε

$$\lambda_{i,j,N} = 2[\tilde{c}_i^{(1)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_1}) + 2\tilde{c}_j^{(2)}]. \quad (3.16)$$

Περίπτωση IV:  $N_1$  άρτιο,  $N_2$  περιττό

Σε αυτή την περίπτωση  $\ell_1 = \frac{N_1}{2}$  και  $\ell_2 = \frac{N_2+1}{2}$ , οπότε από την (3.3) έχουμε

$$\lambda_{i,j,N} = 2[2\tilde{c}_i^{(1)} + \tilde{c}_j^{(2)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})]. \quad (3.17)$$

Χρησιμοποιώντας τους τύπους  $\lambda_{i,j,2}$  και  $\lambda_{i,j,N}$  που δίνονται από τις (3.12) και (3.14), αντίστοιχα στις (3.8), (3.9) και (3.10), εύκολα συμπεραίνουμε τα αποτελέσματα που δίνονται για τις περιπτώσεις 1 και 2 του πίνακα 3.1. Παρόμοια είναι η προσέγγιση για τις περιπτώσεις 3,4,5,6,7,8 του πίνακα 3.1. ■

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

**Πόρισμα 3.1.3** Αν  $N_1$  είναι άρτιος και  $N_2$  είναι περιττός, τότε ο  $\gamma_{i,j}(M_{ij})$  ελαχιστοποιείται στο

$$\tau_{ij}^{opt} = \begin{cases} [\tilde{c}_i^{(1)}(3 - \cos \frac{2\pi}{N_1}) + \tilde{c}_j^{(2)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})]^{-1}, & \sigma_{ij} \geq \sigma_2 \\ [2\tilde{c}_i^{(1)} + \tilde{c}_j^{(2)}(2 - \cos \frac{2\pi}{N_2} + \cos \frac{\pi}{N_2})]^{-1}, & \sigma_{ij} \leq \sigma_2 \end{cases} \quad (3.18)$$

και το αντίστοιχο ελάχιστο δίνεται από την

$$\gamma_{ij}^{opt} = \begin{cases} \frac{\tilde{c}_i^{(1)}(1 + \cos \frac{2\pi}{N_1}) + \tilde{c}_j^{(2)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}{\tilde{c}_i^{(1)}(3 - \cos \frac{2\pi}{N_1}) + \tilde{c}_j^{(2)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}, & \sigma_{ij} \geq \sigma_2 \\ \frac{2\tilde{c}_i^{(1)} + \tilde{c}_j^{(2)}(\cos \frac{2\pi}{N_2} + \cos \frac{\pi}{N_2})}{2\tilde{c}_i^{(1)} + \tilde{c}_j^{(2)}(2 - \cos \frac{2\pi}{N_2} + \cos \frac{\pi}{N_2})}, & \sigma_{ij} \leq \sigma_2. \end{cases} \quad (3.19)$$

Αν  $N_1$  είναι περιττός και  $N_2$  άρτιος, τότε το  $\gamma_{ij}(M_{ij})$  ελαχιστοποιείται στο

$$\tau_{ij}^{opt} = \begin{cases} \frac{1}{\tilde{c}_i^{(1)}(2 - \cos \frac{2\pi}{N_1} + \cos \frac{\pi}{N_1}) + 2\tilde{c}_j^{(2)}}, & \sigma_{ij} \geq \sigma_2 \\ \frac{1}{\tilde{c}_i^{(1)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_1}) + \tilde{c}_j^{(2)}(3 - \cos \frac{2\pi}{N_2})}, & \sigma_{ij} \leq \sigma_2 \end{cases} \quad (3.20)$$

και το αντίστοιχο ελάχιστο δίνεται από τον τύπο

$$\gamma_{ij}^{opt} = \begin{cases} \frac{\tilde{c}_i^{(1)}(\cos \frac{\pi}{N_1} + \cos \frac{2\pi}{N_1}) + 2\tilde{c}_j^{(2)}}{\tilde{c}_i^{(1)}(2 + \cos \frac{\pi}{N_1} - \cos \frac{2\pi}{N_1}) + 2\tilde{c}_j^{(2)}}, & \sigma_{ij} \geq \sigma_2 \\ \frac{\tilde{c}_i^{(1)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_1}) + \tilde{c}_j^{(2)}(1 + \cos \frac{2\pi}{N_2})}{\tilde{c}_i^{(1)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_1}) + \tilde{c}_j^{(2)}(3 - \cos \frac{2\pi}{N_2})}, & \sigma_{ij} \leq \sigma_2. \end{cases} \quad (3.21)$$

**Αποδειξη .** Ακολουθώντας την ίδια πορεία για την απόδειξη του θεωρήματος 3.1.2 έχουμε ότι η (3.3) δίνει

$$\lambda_{i,j,N} = \begin{cases} 2[2\tilde{c}_i^{(1)} + \tilde{c}_j^{(2)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})] & \text{Αν } N_1 \text{ είναι άρτιος και } N_2 \text{ είναι περιττός.} \\ 2[2\tilde{c}_j^{(2)} + \tilde{c}_i^{(1)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_1})] & \text{Αν } N_1 \text{ είναι περιττός και } N_2 \text{ είναι άρτιος.} \end{cases} \quad (3.22)$$

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

Χρησιμοποιώντας την (3.22) αντί για την (3.17) μπορούμε να δουλέψουμε παρόμοια όπως στο προηγούμενο θεώρημα για να βρούμε τις (3.18) και (3.19). Η περίπτωση όπου  $N_1$  είναι περιττός και  $N_2$  είναι άρτιος, αντιμετωπίζεται παρόμοια. ■

### 3.2 Προσδιορισμός των βέλτιστων $\tilde{c}_i^{(1)}$ και $\tilde{c}_j^{(2)}$ .

Μέχρι αυτό το σημείο μας απασχολούσε μόνο ο προσδιορισμός των βέλτιστων τιμών για το σύνολο των παραμέτρων  $\tau_{ij}$  σε συναρτήση των  $\tilde{c}_i^{(1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_1$  και  $\tilde{c}_j^{(2)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_2$ . Βασικά έχουμε λύσει το πρόβλημα της μεγιστοποίησης του ρυθμού σύγκλισης της τοπικής ΕΔΧ υποθέτοντας ότι γνωρίζουμε τα βάρη των ακμών του γράφου και οι επεξεργαστές έχουν κάποια σταθερή ταχύτητα. Στο επόμενο βήμα, θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε τα  $\tilde{c}_i^{(1)}$  και  $\tilde{c}_j^{(2)}$  έτσι ώστε τα  $P_{ij}$  (οπότε και τα  $\gamma_{ij}$ ) είναι ελαχιστοποιούνται.

**Θεώρημα 3.2.1** *Ο παράγοντας σύγκλισης  $\gamma_{ij}(M_{ij})$  ελαχιστοποιείται όταν*

$$c_j^{(2)} = \sigma_2 * \frac{w_{i+1,j}}{w_{i,j+1}} c_i^{(1)} \quad (3.23)$$

και

$$\tau_{ij}^{opt} = \frac{\tau^{opt}}{\tilde{c}_i^{(1)}} \quad (3.24)$$

για κάθε  $i=1,2,\dots,N_1$ ,  $j=1,2,\dots,N_2$  και το αντίστοιχο ελάχιστο είναι το  $\gamma^{opt}$  όπου  $\tau_{ij}^{opt}$  και  $\gamma^{opt}$  δίνονται από τον πίνακα 3.2.

**Αποδειξη** . Όταν τα  $N_1$ ,  $N_2$  είναι άρτιοι, ο P αριθμός συνθήκης του  $L_{ij}$  είναι, λόγω των (3.12) και (3.14), από την

$$P_{ij}(L_{ij}) = \begin{cases} \frac{2(\sigma_{ij} + 1)}{1 - \cos \frac{2\pi}{N_1}}, & \sigma_{ij} \geq \sigma_2 \\ \frac{2(\sigma_{ij} + 1)}{\sigma_{ij}(1 - \cos \frac{2\pi}{N_2})}, & \sigma_{ij} \leq \sigma_2. \end{cases} \quad (3.25)$$

Μελετώντας την συμπεριφορά της παραπάνω έκφρασης, σε συνάρτηση του  $\sigma_{ij}$  μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ελαχιστοποιείται στο  $\sigma_{ij} = \sigma_2$ , οπότε από την

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

$N_1$	$N_2$	Περίπτωση	$\tau^{opt}$	$\gamma^{opt}$
Άρτιος	Άρτιος	1	$[3 + 2\sigma_2 - \cos \frac{2\pi}{N_1}]^{-1}$	$\frac{1 + 2\sigma_2 + \cos \frac{2\pi}{N_1}}{3 + 2\sigma_2 - \cos \frac{2\pi}{N_1}}$
Περιττός	Περιττός	2	$[2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}) + \cos \frac{\pi}{N_1} - \cos \frac{2\pi}{N_1}]^{-1}$	$\frac{\cos \frac{\pi}{N_1} + \cos \frac{2\pi}{N_1} + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}{2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}) + \cos \frac{\pi}{N_1} - \cos \frac{2\pi}{N_1}}$
Άρτιος	Περιττός	3	$[3 - \cos \frac{2\pi}{N_1} + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})]^{-1}$	$\frac{1 + \cos \frac{2\pi}{N_1} + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}{3 - \cos \frac{2\pi}{N_1} + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}$
Περιττός	Άρτιος	4	$[2 + 2\sigma_2 + \cos \frac{\pi}{N_1} - \cos \frac{2\pi}{N_1}]^{-1}$	$\frac{2\sigma_2 + \cos \frac{\pi}{N_1} + \cos \frac{2\pi}{N_1}}{2 + 2\sigma_2 + \cos \frac{\pi}{N_1} - \cos \frac{2\pi}{N_1}}$

Πίνακας 3.2: Τύποι για τις βέλτιστες τιμές των  $\tau^{opt}$  και  $\gamma^{opt}$  σε δισδιάστατο αναδιπλωμένο πλέγμα

(3.13) έχουμε ότι

$$\tilde{c}_j^{(2)} = \sigma_2 \tilde{c}_i^{(1)}$$

$$\text{ή } \frac{c_{i,j+1} w_{i,j+1}}{s_{j+1}} = \sigma_2 \frac{c_{i+1,j} w_{i+1,j}}{s_{i+1}}$$

$$\text{ή } c_{i,j+1} = \sigma_2 \frac{w_{i+1,j} s_{j+1}}{w_{i,j+1} s_{i+1}} c_{i+1,j}$$

$$\text{ή } c_j^{(2)} = \sigma_2 * \frac{w_{i+1,j}}{w_{i,j+1}} c_i^{(1)}$$

Αντικαθιστώντας την  $c_j^{(2)}$  που δίνεται από την (3.23) στις εκφράσεις των  $\tau_{ij}^{opt}$  και  $\gamma_{ij}^{opt}$  της περίπτωσης 1 στον πίνακα 3.1, λαμβάνουμε την (3.24), όπου τα  $\tau^{opt}$  και  $\gamma^{opt}$  δίνονται όπως στην περίπτωση 1 του πίνακα 3.2. Ανάλογη αντιμετώπιση και για την περίπτωση 3 του πίνακα 3.1 οδηγεί στην περίπτωση 2 του πίνακα 3.2. Οι περιπτώσεις 3 και 4 του πίνακα 3.2 αποδεικνύονται χρησιμοποιώντας τις άνω εκφράσεις των 3.18, 3.19, 3.22, 3.23. Επίσης οι περιπτώσεις 2,3 του πίνακα 3.1 και οι κάτω εκφράσεις των 3.18, 3.19, 3.22, 3.23 θα παράγουν τα ίδια αποτελέσματα. ■

Παρόμοια αποτελέσματα ισχύουν στην περίπτωση που το  $c_j^{(2)}$  είναι αυθαίρετο.

**Πόρισμα 3.2.2** Ο παράγοντας σύγκλισης  $\gamma_i(M_i)$  του τελεστή του δακτυλίου (ring)  $M_i$  ελαχιστοποιείται για

$$\tau_i^{opt} = \frac{\tau^{opt}}{\tilde{c}_i^{(1)}}, \quad (3.26)$$

με  $\tilde{c}_i^{(1)} = \tilde{c}_{i,i+1}$  αυθαίρετο για κάθε  $i = 1, 2, \dots, N$  και το αντίστοιχο ελάχιστο είναι  $\gamma^{opt}$ , όπου τα  $\tau^{opt}$  και  $\gamma^{opt}$  δίνονται από τις περιπτώσεις 1 και 2 του πίνακα 3.2 με  $\sigma_2 = 0$ . αντίστοιχα.

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

**Αποδειξη .** Στον δακτύλιο  $\tilde{c}_j^{(2)} = 0$ , οπότε από (3.23) έχουμε ότι  $\sigma_2 = 0$ . ■

Από την (3.23) διαπιστώνουμε ότι αν η παράμετρος  $\tilde{c}_{ij}$  στην μία διάσταση, του δισδιάστατου αναδιπλούμενου πλέγματος είναι ίση με μια σταθερά τιμή, τότε η αντίστοιχη παράμετρος στην άλλη διάσταση θα είναι επίσης ίση με μια σταθερά. Στην περίπτωση που αυτές οι παράμετροι είναι ίσες με μία σταθερά σε κάθε διάσταση του δισδιάστατου αναδιπλούμενου πλέγματος οι υποθέσεις για την τοπική ανάλυση κατά Fourier ισχύουν. Αυτό ικανοποιείται ως εξής. Οι παράμετροι  $\tilde{c}_{ij}$  συσχετίζονται με τους συντελεστές της εξίσωσης Διάχυσης, όπως φαίνεται στην [6], όπου η περιοδικότητα των συνοριακών συνθηκών συνδέονται με τους εξωτερικούς συνδέσμους του αναδιπλούμενου πλέγματος. Σαν συνέπεια έχουμε, ότι αν οι παράμετροι  $\tilde{c}_{ij}$  σε μία διάσταση είναι ίσες με την ίδια σταθερά, τότε οι ιδιοτιμές του τελεστή  $L_{ij}$ , δίνονται από την (3.4), συμπίπτουν με τις ιδιοτιμές του Laplacian πίνακα  $L$ . Επί πλέον, η τοπική ΕΔΧ εκφυλίζεται στην ΕΔΧ αφού τώρα η  $\tau_{ij}^{opt}$  (δες (3.19)) θα είναι σταθερά, όπως η  $\tau_{EDF}^{opt}$ . Για αυτό έχουμε τα ακόλουθα.

**Πόρισμα 3.2.3** *Αν οι παράμετροι  $\tilde{c}_{ij}$  σε μια διάσταση του δισδιάστατου αναδιπλούμενου πλέγματος είναι ίσες με την ίδια σταθερά και ισχύει η (3.23), τότε το  $\gamma(M)$ , ο παράγοντας σύγκλισης του πίνακα διάχυσης  $M$ , ελαχιστοποιείται στο  $\tau_{EDF}^{opt}$ , που δίνεται από την (3.24) και το αντίστοιχο ελάχιστο είναι το  $\gamma^{opt}$ , όπου τα  $\tau^{opt}, \gamma^{opt}$  δίνονται από τις εκφράσεις του πίνακα 3.2.*

**Πόρισμα 3.2.4** *Υπό την υπόθεση του πορίσματος 3.2.3 και αν  $N=N_1=N_2$ , τότε ο παράγοντας σύγκλισης  $\gamma(M)$  ελαχιστοποιείται στο  $\tau_{EDF}^{opt}$  που δίνεται από την (3.24) με  $\sigma_2 = 1$ ,*

$$\tau^{opt} = \begin{cases} [5 - \cos \frac{2\pi}{N}]^{-1}, & \text{αν } N \text{ είναι άρτιος} \\ [3 + 2 \cos \frac{\pi}{N} - \cos \frac{2\pi}{N}]^{-1}, & \text{αν } N \text{ είναι περιττός} \end{cases} \quad (3.27)$$

και το αντίστοιχο ελάχιστο δίνεται από την

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

$$\gamma^{opt} = \begin{cases} \frac{3 + \cos \frac{2\pi}{N}}{5 - \cos \frac{2\pi}{N}}, & \text{αν } N \text{ είναι άρτιος} \\ \frac{1 + 2 \cos \frac{\pi}{N} + \cos \frac{2\pi}{N}}{3 + 2 \cos \frac{\pi}{N} - \cos \frac{2\pi}{N}}, & \text{αν } N \text{ είναι περιττός} \end{cases} \quad (3.28)$$

**Αποδειξη .**

Αν  $N=N_1=N_2$ , τότε  $\sigma_2=1$  οπότε οι (3.27) και (3.28) λαμβάνονται από τις περιπτώσεις 1 και 2 του πίνακα 3.2. ■

Το ανωτέρω πόρισμα επεκτείνει το θεώρημα 4.2 του [14] καθώς δείχνει ότι το  $\gamma(M)$  πετυχαίνει το ίδιο ελάχιστο όχι μόνο για ίσες  $\tilde{c}_{ij}$  αλλά επίσης και για  $\tilde{c}_{ij}$  που είναι ίσες σε κάθε διάσταση του δισδιάστατου αναδιπλούμενου πλέγματος ικανοποιώντας την (3.23). Θέτνοντας  $\tilde{c}_i^{(1)} = 1$  για κάθε  $i = 1, 2, \dots, N_1$  στην (3.23) τότε έχουμε  $\tilde{c}_i^{(1)} = 1$  ή  $\tilde{c}_{i+1,j} = 1$  ή  $\frac{c_{i+1,j}w_{i+1,j}}{s_{i+1}} = 1$  ή

$$c_{i+1,j} = \frac{s_{i+1}}{w_{i+1,j}} \quad (3.29)$$

Από την (3.23) έχουμε  $\tau_{ij}^{opt} = \tau^{opt}$  ή  $\tilde{c}_{i-1,j} = 1$  ή  $\frac{c_{i-1,j}w_{i-1,j}}{s_{i-1}} = 1$

$$c_{i-1,j} = \frac{s_{i-1}}{w_{i-1,j}} \quad (3.30)$$

$\tilde{c}_{i,j+1} = \sigma_2$  ή

$$c_{i,j+1} = \frac{\sigma_2 s_{j+1}}{w_{i,j+1}} \quad (3.31)$$

$\tilde{c}_{i,j-1} = \tilde{c}_{i,j+1} \Rightarrow \tilde{c}_{i,j-1} = \sigma_2$

$$c_{i,j-1} = \frac{\sigma_2 s_{j-1}}{w_{i,j-1}} \quad (3.32)$$

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

Υπόψιν ότι στην ομογενή περίπτωση όπου  $s_{ij} = s$  και  $w_{ij} = 1$  για κάθε  $i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots, N$  το θεώρημα 3.2.1 παράγει το θεώρημα 10 του [9]. Με άλλα λόγια η ετερογενής ΕΔΧ εκφυλίζεται στην ομογενή. Θα αναφερόμαστε σε αυτή την περίπτωση ως την κανονικοποιημένη

**Πόρισμα 3.2.5** Για την κανονικοποιημένη περίπτωση, ο παράγοντας σύγκλισης  $\gamma(M)$  ελαχιστοποιείται στο  $\tau_{EDF}^{opt} = \tau^{opt}$  και το αντίστοιχο ελάχιστο δίνεται από την  $\gamma^{opt}$ , όπου τα  $\tau^{opt}, \gamma^{opt}$  δίνονται από τις εκφράσεις του πίνακα 3.2.

### 3.3 Σύγκριση με την μέθοδο ΔΧ

Αφού για  $N_1 = N_2$  η ΕΔΧ και η ΔΧ ταυτίζονται στο βέλτιστο στάδιο (πόρισμα 3.2.4) θα ήταν ενδιαφέρον να μελετήσουμε την συμπεριφορά στην περίπτωση όπου  $N_1 \neq N_2$ . Αναμένουμε ότι ο ρυθμός σύγκλισης της μεθόδου ΕΔΧ θα είναι τουλάχιστον τόσο γρήγορος όσο η ΔΧ στο βέλτιστο στάδιο σύμφωνα με το πόρισμα 3.2.3.

**Πόρισμα 3.3.1** Υπό την υπόθεση του πορίσματος 3.2.3, έχουμε ότι

$$\gamma_{E\Delta X}^{opt} \leq \gamma_{\Delta X}^{opt}, \quad (3.33)$$

όπου  $\gamma_{E\Delta X}^{opt}, \gamma_{\Delta X}^{opt}$  είναι οι παράγοντες σύγκλισης των ΕΔΧ και ΔΧ μεθόδων, αντίστοιχα.

**Αποδειξη .** Ας υποθέσουμε ότι  $N_1 \geq N_2$  και  $x = \frac{2\pi}{N_1}, y = \frac{2\pi}{N_2}$ . Ας θεωρήσουμε την περίπτωση 1 του πίνακα 3.2, όπου  $N_1, N_2$  είναι άρτιοι. Σε αυτή την περίπτωση η βέλτιστη τιμή του  $\gamma_{EDF}$  είναι (περίπτωση 1 του πίνακα 3.2)

$$\gamma_{E\Delta X}^{opt} = \frac{1 + 2\sigma_2 + \cos x}{3 + 2\sigma_2 - \cos x}, \quad (3.34)$$

όπου

$$\sigma_2 = \frac{1 - \cos x}{1 - \cos y} \leq 1. \quad (3.35)$$

Επίσης, η βέλτιστη τιμή του  $\gamma_{DF}$  δίνεται από το [13]

$$\gamma_{\Delta X}^{opt} = \frac{3 + \cos x}{5 - \cos x}. \quad (3.36)$$

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

Ένας απλός αλγεβρικός χειρισμός δείχνει ότι

$sign(\gamma_{E\Delta X}^{opt} - \gamma_{\Delta X}^{opt}) = sign(\cos x - 1)(1 - \sigma_2) = -1$  ή  $0$  εφόσον  $\sigma_2 \leq 1$  που προκύπτει από την (3.25). Αν  $N_1 \leq N_2$ , τότε [13]

$$\gamma_{\Delta X}^{opt} = \frac{3 + \cos y}{5 - \cos y}$$

και  $sign(\gamma_{E\Delta X}^{opt} - \gamma_{\Delta X}^{opt}) = sign[(\cos x - \cos y) + \cos y(\cos y - 1)] = -1$  ή  $0$  αφού τώρα  $\cos x \leq \cos y$ . Στην περίπτωση όπου  $N_1, N_2$  είναι περιττοί και  $N_1 \geq N_2$ , τότε (δες περίπτωση 2 του πίνακα 3.2)

$$\gamma_{E\Delta X}^{opt} = \frac{2(\cos y - 1)}{2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{x}{2}) + \cos \frac{y}{2} - \cos y} + 1 \quad (3.37)$$

και [13]

$$\gamma_{\Delta X}^{opt} = \frac{2(2 + \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{y}{2})}{3 + \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{y}{2} - \cos x} - 1. \quad (3.38)$$

Ένας απλός αλγεβρικός χειρισμός δείχνει ότι

$sign(\gamma_{E\Delta X}^{opt} - \gamma_{\Delta X}^{opt}) = sign(\sigma_2 - 1)(1 + \cos \frac{y}{2}) = -1$  ή  $0$ .

Επί πλέον, αν  $N_1 \leq N_2$ , τότε [13]

$$\gamma_{\Delta X}^{opt} = \frac{2(2 + \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{y}{2})}{3 + \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{y}{2} - \cos y} - 1$$

και  $sign(\gamma_{E\Delta X}^{opt} - \gamma_{\Delta X}^{opt}) = sign(\cos x - \cos y)(1 + \cos \frac{x}{2}) = -1$  ή  $0$  αφού τώρα  $\cos x \leq \cos y$ , κατά συνέπεια η (3.25) ισχύει για αυτή την περίπτωση. Παρόμοια προσέγγιση και για τις περιπτώσεις, όπου  $N_1$  είναι άρτιο και  $N_2$  είναι περιττό και αντίθετα δείχνει ότι η (3.25) ισχύει επίσης και για αυτές τις περιπτώσεις συμπληρώνοντας την απόδειξη αυτού του πορίσματος. ■

### 3.4 Το επίμηκες Αναδιπλούμενο Πλέγμα

Θα ήταν ενδιαφέρον να μελετήσουμε παραπάνω την περίπτωση, όπου η μία δάστυση του αναδιπλούμενου πλέγματος είναι μεγαλύτερη σε σχέση με την άλλη (stretched torus).

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

**Πόρισμα 3.4.1** Για επίμηκες αναδιπλούμενο πλέγμα και κάτω από την υπόθεση του πορίσματος 3.2.3 έχουμε ότι

$$R(E\Delta X) \simeq 2R(\Delta X), \quad (3.39)$$

όπου  $R(E\Delta X), R(DF)$  δηλώνουν τον ρυθμό σύγκλισης της  $E\Delta X$  και  $\Delta X$ , αντίστοιχα.

**Αποδειξη** . Ας θεωρήσουμε ότι  $N_1 \gg N_2$  και είναι και τα δύο άρτιοι, τότε το  $R(E\Delta X)$ , δίνεται από την (δες (3.11))

$$R(E\Delta X) = -\log \gamma_{E\Delta X}^{opt} \simeq \frac{2\pi^2 h_1^2}{1 + \sigma_2} \quad (3.40)$$

αφού  $-\log(1 - x) \simeq x$  και (δες περίπτωση 1 του πίνακα 3.2)

$$\gamma_{E\Delta X}^{opt} = 1 - \frac{1 - \cos \frac{2\pi}{N_1}}{1 + \sigma_2}. \quad (3.41)$$

Ομοίως για την  $DF$  μέθοδο έχουμε (δες (3.28) )

$$R(\Delta X) = -\log(\gamma_{DF}^{opt}) \simeq \pi^2 h_1^2 \quad (3.42)$$

αφού  $\gamma_{\Delta X}^{opt} = 1 - \frac{2(1 - \cos \frac{2\pi}{N_1})}{5 - \cos \frac{2\pi}{N_1}}$ . Διαιρώντας την (3.40) και (3.42) έχουμε την

$$\frac{R(E\Delta X)}{R(\Delta X)} \simeq \frac{2}{1 + \frac{1}{\sigma_2}} \quad (3.43)$$

και επίσης σημειώνουμε ότι  $\sigma_2 \rightarrow 0$  για  $N_1 \rightarrow \infty$  και  $N_2$  σταθερό, η (3.43) καταλήγει στην (3.39).

Αν τώρα  $N_1 \ll N_2$ , τότε  $R(E\Delta X) \simeq \frac{2\pi^2 h_2^2}{1 + \frac{1}{\sigma_2}}$  και  $R(\Delta X) \simeq \pi^2 h_2^2$  οπότε

$$\frac{R(E\Delta X)}{R(\Delta X)} \simeq \frac{2}{1 + \frac{1}{\sigma_2}}, \quad (3.44)$$

όπου τώρα  $\sigma_2 \rightarrow \infty$  για  $N_2 \rightarrow \infty$  και  $N_1$  σταθερό και (3.44) καταλήγει στην (3.39). Ακολουθώντας παρόμοιο χειρισμό για τις άλλες περιπτώσεις του πίνακα 3.2 μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η (3.39) είναι σωστή. ■

Από το παραπάνω πόρισμα έχουμε ότι για το επίμηκες αναδιπλούμενο πλέγμα ο αριθμός των επαναλήψεων της μεθόδου  $E\Delta X$  είναι περίπου ο μισός του αριθμού των επαναλήψεων της μεθόδου  $\Delta X$  και για τις δύο μεθόδους για να πετύχουν το ίδιο κριτήριο εξισορρόπησης της ροής.

## Κεφάλαιο 4

### Το Πλέγμα (Mesh)

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε το δισδιάστατο - πλέγμα.

#### 4.1 Προσδιορισμός βέλτιστων τιμών των παραμέτρων

**Θεώρημα 4.1.1** Ο παράγοντας σύγκλισης  $\gamma_{ij}(M_{ij})$  του τελεστή  $M_{ij}$  ελαχιστοποιείται στο  $\tau_{ij}^{opt}$  και το αντίστοιχο ελάχιστο είναι  $\gamma_{ij}^{opt}$ , όπως παρουσιάζεται στον πίνακα 4.1, όπου  $\sigma_{ij}$  και  $\sigma_2$  δίνονται από την (4.2).

$N_1, N_2$	Συνθήκη	Περίπτωση	$\tau_{ij}^{opt}$	$\gamma_{ij}^{opt}$
φόρτιο, περίττοι, μεικτή	$\sigma_{ij} \geq \sigma_2$	1	$(2\tilde{c}_i^{(1)} + \tilde{c}_j^{(2)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}))^{-1}$	$\frac{2\tilde{c}_i^{(1)} \cos \frac{\pi}{N_1} + \tilde{c}_j^{(2)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}{2\tilde{c}_i^{(1)} + \tilde{c}_j^{(2)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}$
	$\sigma_{ij} \leq \sigma_2$	2	$(2\tilde{c}_j^{(2)} + \tilde{c}_i^{(1)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_1}))^{-1}$	$\frac{\tilde{c}_i^{(1)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_1}) + 2\tilde{c}_j^{(2)} \cos \frac{\pi}{N_2}}{\tilde{c}_i^{(1)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_1}) + 2\tilde{c}_j^{(2)}}$

Πίνακας 4.1: Τύποι για βέλτιστο  $\tau_{ij}$  και  $\gamma_{ij}$  σε δισδιάστατο πλέγμα

**Αποδειξη .** Η βέλτιστη τιμή για το  $\tau_{ij}$  θα προσδιοριστεί παρόμοια με την θεωρία για το αναδιπλούμενο πλέγμα. Είναι επίσης απαραίτητο να προσδιορίσουμε το  $\lambda_{i,j,2}$  και το  $\lambda_{i,j,N}$ . Για τον προσδιορισμό του  $\lambda_{i,j,2}$  έστω ότι  $\ell_1=0$  και  $\ell_2=1$ , ή  $\ell_1=1$  και  $\ell_2=0$  στην (3.3), αυτό μας δίνει  $\lambda_{i,j,2} = 2\tilde{c}_j^{(2)}(1 - \cos \frac{\pi}{N_2})$  ή  $\lambda_{i,j,2} = 2\tilde{c}_i^{(1)}(1 - \cos \frac{\pi}{N_1})$  για κάθε μία από τις παραπάνω επιλογές των  $\ell_1, \ell_2$ , που οδηγούν στο ακόλουθο

$$\lambda_{i,j,2} = \begin{cases} 2\tilde{c}_i^{(1)}(1 - \cos \frac{\pi}{N_1}), & \sigma_{ij} \geq \sigma_2 \\ 2\tilde{c}_j^{(2)}(1 - \cos \frac{\pi}{N_2}), & \sigma_{ij} \leq \sigma_2, \end{cases} \quad (4.1)$$

όπου

$$\sigma_{ij} = \frac{\tilde{c}_j^{(2)}}{\tilde{c}_i^{(1)}} \text{ and } \sigma_2 = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{N_1}}{1 - \cos \frac{\pi}{N_2}}. \quad (4.2)$$

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

Η μέγιστη ιδιοτιμή  $\lambda_{i,j,N}$  προσδιορίζεται δίνοντας  $\ell_1 = N_1 - 1$  και  $\ell_2 = N_2 - 1$  στην (3.3).

Έχουμε ότι  $\ell_1 = N_1 - 1$  και  $\ell_2 = N_2 - 1$ , οπότε έχουμε

$$\lambda_{i,j,N} = 2[\tilde{c}_i^{(1)}(1 - \cos(\pi - \frac{\pi}{N_1})) + \tilde{c}_j^{(2)}(1 - \cos(\pi - \frac{\pi}{N_2}))]$$

ή

$$\lambda_{i,j,N} = 2[\tilde{c}_i^{(1)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_1}) + \tilde{c}_j^{(2)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})] \quad (4.3)$$

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις  $\lambda_{i,j,2}$  και  $\lambda_{i,j,N}$  που δίνονται από τις (4.1) και (4.3), αντίστοιχα στις (3.8), (3.9) και (3.10), έχουμε:

$$\tau_{ij}^{opt} = \begin{cases} (2\tilde{c}_i^{(1)} + \tilde{c}_j^{(2)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}))^{-1}, & \sigma_{ij} \geq \sigma_2 \\ (2\tilde{c}_j^{(2)} + \tilde{c}_i^{(1)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_1}))^{-1}, & \sigma_{ij} \leq \sigma_2, \end{cases} \quad (4.4)$$

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{\tilde{c}_i^{(1)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_1}) + \tilde{c}_j^{(2)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}{\tilde{c}_i^{(1)}(1 - \cos \frac{\pi}{N_1})}, & \sigma_{ij} \geq \sigma_2 \\ \frac{\tilde{c}_i^{(1)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_1}) + \tilde{c}_j^{(2)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}{\tilde{c}_j^{(2)}(1 - \cos \frac{\pi}{N_2})}, & \sigma_{ij} \leq \sigma_2, \end{cases} \quad (4.5)$$

και

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \frac{2\tilde{c}_i^{(1)} \cos \frac{\pi}{N_1} + \tilde{c}_j^{(2)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}{2\tilde{c}_i^{(1)} + \tilde{c}_j^{(2)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}, & \sigma_{ij} \geq \sigma_2 \\ \frac{\tilde{c}_i^{(1)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_1}) + 2\tilde{c}_j^{(2)} \cos \frac{\pi}{N_2}}{\tilde{c}_i^{(1)}(1 + \cos \frac{\pi}{N_1}) + 2\tilde{c}_j^{(2)}}, & \sigma_{ij} \leq \sigma_2, \end{cases} \quad (4.6)$$

■

## 4.2 Προσδιορισμός των βέλτιστων $\tilde{c}_i^{(1)}$ και $\tilde{c}_j^{(2)}$ .

Μέχρι αυτό το σημείο μας απασχολούσε μόνο ο προσδιορισμός των βέλτιστων τιμών για το σύνολο των παραμέτρων  $\tau_{ij}$  συναρτήση των  $\tilde{c}_i^{(1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N_1$  και  $\tilde{c}_j^{(2)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_2$ . Βασικά έχουμε λύσει το πρόβλημα της μεγιστοποίησης του ρυθμού σύγκλισης της τοπικής ΕΔΧ υποθέτοντας ότι γνωρίζουμε τα βάρη των ακμών του

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

γράφου και οι επεξεργαστές έχουν κάποια σταθερή ταχύτητα. Στο επόμενο βήμα, θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε τα  $\tilde{c}_i^{(1)}$  και  $\tilde{c}_j^{(2)}$  έτσι ώστε τα  $P_{ij}$  (οπότε και τα  $\gamma_{ij}$ ) να ελαχιστοποιούνται.

**Θεώρημα 4.2.1** Ο παράγοντας σύγκλισης  $\gamma_{ij}(M_{ij})$  ελαχιστοποιείται όταν

$$\tilde{c}_j^{(2)} = \sigma_2 \tilde{c}_i^{(1)} \quad (4.7)$$

και

$$\tau^{opt} = \frac{\tau_{ij}^{opt}}{\tilde{c}_i^{(1)}} \quad (4.8)$$

για κάθε  $i=1,2,\dots,N_1$ ,  $j=1,2,\dots,N_2$  και το αντίστοιχο ελάχιστο είναι το  $\gamma^{opt}$  όπου  $\tau_{ij}^{opt}$  και  $\gamma^{opt}$  δίνονται από τον πίνακα 4.1.

$N_1, N_2$	$\tau^{opt}$	$\gamma^{opt}$
άρτιοι, περιττοί, μεικτά	$(2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}))^{-1}$	$\frac{2 \cos \frac{\pi}{N_1} + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}{2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}$

Πίνακας 4.2: Τύποι για τις βέλτιστες τιμές των  $\tau^{opt}$  και  $\gamma^{opt}$  σε δισδιάστατο πλέγμα

**Αποδειξη .** Ο Ρ αριθμός συνθήκης του  $L_{ij}$  λόγω των (4.1) και (4.3), δίνεται από την

$$P_{ij}(L_{ij}) = \begin{cases} \frac{1 + \cos \frac{\pi}{N_1} + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}{1 - \cos \frac{\pi}{N_1}}, & \sigma_{ij} \geq \sigma_2 \\ \frac{1 + \cos \frac{\pi}{N_1} + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}{\sigma_2(1 - \cos \frac{\pi}{N_2})}, & \sigma_{ij} \leq \sigma_2. \end{cases} \quad (4.9)$$

Μελετώντας την συμπεριφορά της παραπάνω έκφρασης, σε συνάρτηση του  $\sigma_{ij}$  μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ελαχιστοποιείται στο  $\sigma_{ij} = \sigma_2$ , οπότε από την (4.2) έχουμε

$$\frac{c_{i,j+1} w_{i,j+1}}{s_{j+1}} = \sigma_2 \frac{c_{i+1,j} w_{i+1,j}}{s_{i+1}} \Rightarrow c_{i,j+1} = \sigma_2 \frac{w_{i+1,j} s_{j+1}}{w_{i,j+1} s_{i+1}} c_{i+1,j} \Rightarrow$$

$$c_j^{(2)} = \sigma_2 * \frac{w_{i+1,j}}{w_{i,j+1}} c_i^{(1)} \quad (4.10)$$

Αντικαθιστώντας την  $c_j^{(2)}$  που δίνεται από την (4.7) στις εκφράσεις των  $\tau_{ij}^{opt}$  και  $\gamma_{ij}^{opt}$  στον πίνακα 4.1, λαμβάνουμε την (4.8), όπου τα  $\tau^{opt}$  και  $\gamma^{opt}$  δίνονται όπως στην περίπτωση

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

1 του πίνακα 4.2. Παρόμοια αποτελέσματα ισχύουν στην περίπτωση που το  $c_j^{(2)}$  είναι αυθαίρετο. ■

**Πόρισμα 4.2.2** Αν οι παράμετροι  $\tilde{c}_{ij}$  σε μια διάσταση του πλέγματος είναι ίσες με την ίδια σταθερά και ισχύει η (4.7), τότε το  $\gamma(M)$ , ο παράγοντας σύγκλισης του πίνακα διάχυσης  $M$ , ελαχιστοποιείται στο  $\tau_{EDF}^{opt}$ , που δίνεται από την (4.8) και το αντίστοιχο ελάχιστο είναι το  $\gamma^{opt}$ , όπου τα  $\tau^{opt}, \gamma^{opt}$  δίνονται από τις εκφράσεις του πίνακα 4.2.

**Πόρισμα 4.2.3** Υπό την υπόθεση του πορίσματος 4.2.2 και αν  $N=N_1=N_2$ , τότε ο παράγοντας σύγκλισης  $\gamma(M)$  ελαχιστοποιείται στο  $\tau_{EDF}^{opt}$  που δίνεται από την (4.8) με  $\sigma_2 = 1$ ,

$$\tau^{opt} = \left(3 + \cos \frac{\pi}{N}\right)^{-1} \quad (4.11)$$

και το αντίστοιχο ελάχιστο δίνεται από την

$$\gamma^{opt} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{N} + (1 + \cos \frac{\pi}{N})}{3 + \cos \frac{\pi}{N}} \quad (4.12)$$

**Αποδειξη .**

Αν  $N=N_1=N_2$ , τότε  $\sigma_2=1$  οπότε οι (4.11) και (4.12) είναι λαμβάνονται άμεσα από τον πίνακα 4.2. ■

**Πόρισμα 4.2.4** Για τις κανονικοποιημένες παραμέτρους  $\tilde{c}_{ij}$  ο παράγοντας σύγκλισης  $\gamma(M)$  ελαχιστοποιείται όταν  $\tau_{EDF}^{opt} = \tau^{opt}$  και το αντίστοιχο ελάχιστο δίνεται από το  $\gamma^{opt}$  όπου  $\tau^{opt}, \gamma^{opt}$  δίνονται από τις εκφράσεις του πίνακα 4.2

### 4.3 Σύγκριση με την μέθοδο ΔΧ

Αφού για  $N_1 = N_2$  η ΕΔΧ και η ΔΧ ταυτίζονται στο βέλτιστο στάδιο (πόρισμα 4.2.3) θα ήταν ενδιαφέρον να μελετήσουμε την συμπεριφορά στην περίπτωση όπου  $N_1 \neq N_2$ . Αναμένουμε ότι ο ρυθμός σύγκλισης της μεθόδου ΕΔΧ θα είναι τουλάχιστον τόσο γρήγορος όσο η ΔΧ στο βέλτιστο στάδιο σύμφωνα με το πόρισμα 4.2.2.

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

**Πόρισμα 4.3.1** Υπό την υπόθεση του πορίσματος 4.2.2, έχουμε ότι

$$\gamma_{E\Delta X}^{opt} \leq \gamma_{\Delta X}^{opt}, \quad (4.13)$$

όπου  $\gamma_{E\Delta X}^{opt}, \gamma_{\Delta X}^{opt}$  είναι οι παράγοντες συγκλίσεως των  $E\Delta X$  και  $\Delta X$  μεθόδων, αντίστοιχα.

**Αποδειξη .** Ας υποθέσουμε ότι  $N_1 \geq N_2$  και  $x = \frac{\pi}{N_1}, y = \frac{\pi}{N_2}$ . Έχουμε από τον πίνακα 4.2 ότι,

$$\gamma_{E\Delta X}^{opt} = \frac{2 \cos x + \sigma_2(1 + \cos y)}{2 + \sigma_2(1 + \cos y)}, \quad (4.14)$$

όπου

$$\sigma_2 = \frac{1 - \cos x}{1 - \cos y} \leq 1. \quad (4.15)$$

Από την άλλη πλευρά, η βέλτιστη τιμή του  $\gamma_{DF}$  δίνεται από το [13]

$$\gamma_{\Delta X}^{opt} = \frac{1 + \cos x}{2}. \quad (4.16)$$

Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} \gamma_{E\Delta X}^{opt} - \gamma_{\Delta X}^{opt} &= \frac{2 \cos x + \sigma_2(1 + \cos y)}{2 + \sigma_2(1 + \cos y)} - \frac{1 + \cos x}{2} \\ &= \frac{4 \cos x + 2\sigma_2(1 + \cos y) - (1 + \cos x)(2 + \sigma_2(1 + \cos y))}{4 + 2\sigma_2(1 + \cos y)} \\ &= \frac{4 \cos x + 2\sigma_2 + 2\sigma_2 \cos y - 2 - \sigma_2 - \sigma_2 \cos y - 2 \cos x - \sigma_2 \cos x - \sigma_2 \cos y \cos x}{4 + 2\sigma_2(1 + \cos y)} \\ &= \frac{2 \cos x + \sigma_2 + \sigma_2 \cos y - 2 - \sigma_2 \cos x - \sigma_2 \cos y \cos x}{4 + 2\sigma_2(1 + \cos y)} \\ &= \frac{2(\cos x - 1) - \sigma_2(\cos x - 1) - \sigma_2 \cos y(\cos x - 1)}{4 + 2\sigma_2(1 + \cos y)} \\ &= \frac{(\cos x - 1)(2 - \sigma_2 - \sigma_2 \cos y)}{4 + 2\sigma_2(1 + \cos y)}. \end{aligned}$$

Ένας απλός αλγεβρικός χειρισμός δείχνει ότι

$$\text{sign}(\gamma_{E\Delta X}^{opt} - \gamma_{\Delta X}^{opt}) = \text{sign}[(\cos x - 1)(2 - \sigma_2 - \sigma_2 \cos y)] = -1.$$

Αν  $N_1 \leq N_2$ , τότε [13]

$$\gamma_{E\Delta X}^{opt} = \frac{1 + \cos x + 2\sigma_2 \cos y}{2\sigma_2 + 1 + \cos x} \quad (4.17)$$

$$\gamma_{\Delta X}^{opt} = \frac{1 + \cos y}{2} \quad (4.18)$$

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

Επομένως και λόγω των 4.17 και 4.18 έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{E\Delta X}^{opt} - \gamma_{\Delta X}^{opt} &= \frac{1 + \cos x + 2\sigma_2 \cos y}{2\sigma_2 + 1 + \cos x} - \frac{1 + \cos y}{2} \\
 &= \frac{2 + 2 \cos x + 4\sigma_2 \cos y - (1 + \cos y)(2\sigma_2 + 1 + \cos x)}{4\sigma_2 + 2 + 2 \cos x} \\
 &= \frac{2 + 2 \cos x + 4\sigma_2 \cos y - 2\sigma_2 - 1 - \cos x - 2\sigma_2 \cos y - \cos y - \cos x \cos y}{4\sigma_2 + 2 + 2 \cos x} \\
 &= \frac{1 + \cos x + 2\sigma_2 \cos y - 2\sigma_2 - \cos y - \cos x \cos y}{4\sigma_2 + 2 + 2 \cos x} \\
 &= \frac{1 + \cos x - 2\sigma_2 - \cos y - \cos y(\cos x - 2\sigma_2)}{4\sigma_2 + 2 + 2 \cos x} \\
 &= \frac{1 - \cos y + (\cos x - 2\sigma_2)(1 - \cos y)}{4\sigma_2 + 2 + 2 \cos x} \\
 &= \frac{(1 - \cos y)(1 + \cos x - 2\sigma_2)}{4\sigma_2 + 2 + 2 \cos x}
 \end{aligned}$$

ή

$$\text{sign}(\gamma_{E\Delta X}^{opt} - \gamma_{\Delta X}^{opt}) = \text{sign}[(1 - \cos y)(1 + \cos x - 2\sigma_2)] = -1. \text{ αφού } \sigma_2 \geq 1$$

■

#### 4.4 Το επίμηκες Πλέγμα

Θα ήταν ενδιαφέρον να μελετήσουμε παραπάνω την περίπτωση, όπου η μία διάσταση του πλέγματος είναι μεγαλύτερη σε σχέση με την άλλη (stretched mesh).

**Πόρισμα 4.4.1** Για το επίμηκες πλέγμα και κάτω από την υπόθεση του πορίσματος 4.2.2 έχουμε ότι

$$R(E\Delta X) \simeq 2R(\Delta X), \tag{4.19}$$

όπου  $R(E\Delta X)$ ,  $R(\Delta X)$  συμβολίζουν τον ρυθμό σύγκλισης της  $E\Delta X$  και  $\Delta X$ , αντίστοιχα.

**Αποδειξη** . Ας θεωρήσουμε ότι  $N_1 \gg N_2$ , τότε το  $R(E\Delta X)$ , δίνεται από την (δες (::) )

$$R(E\Delta X) = -\log \gamma_{E\Delta X}^{opt} \tag{4.20}$$

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

αφού  $-\log(1-x) \simeq x$  από πίνακα 4.2 έχουμε

$$\gamma_{E\Delta X}^{opt} = 1 - \frac{2 - 2 \cos \frac{\pi}{N_1}}{2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}. \quad (4.21)$$

Ομοίως για την  $DF$  μέθοδο έχουμε (δες (4.16) )

$$R(\Delta X) = -\log(\gamma_{DF}^{opt}) \quad (4.22)$$

αφού  $\gamma_{\Delta X}^{opt} = 1 - \frac{1 - \cos \frac{\pi}{N_1}}{2}$ . Διαιρώντας την (4.20) και (4.22) έχουμε την

$$\frac{R(E\Delta X)}{R(\Delta X)} \simeq \frac{\frac{2 - 2 \cos \frac{\pi}{N_1}}{2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}}{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{N_1}}{2}} = \frac{\frac{2(1 - \cos \frac{\pi}{N_1})}{2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}}{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{N_1}}{2}} = \frac{4}{2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})} \simeq 2 \quad (4.23)$$

και επίσης σημειώνουμε ότι  $\sigma_2 \rightarrow 0$  για  $N_1 \rightarrow \infty$  και  $N_2$  σταθερό, η (4.23) καταλήγει στην (4.19).

Αν τώρα  $N_1 \ll N_2$ , τότε αφού  $-\log(1-x) \simeq x$  από πίνακα 4.2 έχουμε

$$\gamma_{E\Delta X}^{opt} = 1 - \frac{2\sigma_2 - 2\sigma_2 \cos \frac{\pi}{N_2}}{2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}. \quad (4.24)$$

Ομοίως για την  $DF$  μέθοδο έχουμε (δες (4.18) )

$$\gamma_{\Delta X}^{opt} = 1 - \frac{1 - \cos \frac{\pi}{N_2}}{2} \quad (4.25)$$

Διαιρώντας την (4.24) και (4.25) έχουμε την

$$\frac{R(E\Delta X)}{R(\Delta X)} \simeq \frac{\frac{2\sigma_2(1 - \cos \frac{\pi}{N_2})}{2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}}{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{N_2}}{2}} = \frac{4\sigma_2}{2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})} \simeq \frac{4\sigma_2}{2\sigma_2} \simeq 2 \quad (4.26)$$

όπου τώρα  $\sigma_2 \rightarrow \infty$  για  $N_2 \rightarrow \infty$  και  $N_1$  σταθερό ■

## 4.5 Σύγκριση Αναδιπλούμενου Πλέγματος και Πλέγματος

- Για  $N_1, N_2$  άρτιοι και  $N_1 \gg N_2$  έχουμε,

$$\gamma_{EDF,T}^{opt} = \frac{1 + 2\sigma_2 + \cos \frac{2\pi}{N_1}}{3 + 2\sigma_2 - \cos \frac{2\pi}{N_1}} \quad (4.27)$$

$$\gamma_{EDF,M}^{opt} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{N_1} + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}{2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})} \quad (4.28)$$

Έχουμε οι  $RR(E\Delta X) = \frac{1}{R(E\Delta X)} = \frac{1}{-\log \gamma}$

$$\begin{aligned} \text{Από (4.27),(4.28) έχουμε ότι } \frac{RR(E\Delta X,M)}{RR(E\Delta X,T)} &= \frac{\frac{2+\sigma_2(1+\cos \frac{\pi}{N_2})}{2-2 \cos \frac{\pi}{N_1}}}{\frac{3+2\sigma_2-\cos \frac{2\pi}{N_1}}{2-2 \cos \frac{2\pi}{N_1}}} \\ &= \frac{2(1 - \cos \frac{2\pi}{N_1})(2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}))}{2(1 - \cos \frac{\pi}{N_1})(3 + 2\sigma_2 - \cos \frac{2\pi}{N_1})} \frac{(1 - \cos \frac{2\pi}{N_1})(2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}))}{(1 - \cos \frac{\pi}{N_1})(3 + 2\sigma_2 - \cos \frac{2\pi}{N_1})} \\ &= \frac{2(1 - \cos \frac{\pi}{N_1})(1 + \cos \frac{\pi}{N_1})(2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}))}{(1 - \cos \frac{\pi}{N_1})(3 + 2\sigma_2 - \cos \frac{2\pi}{N_1})} = \frac{2(1 + \cos \frac{\pi}{N_1})(2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}))}{(3 + 2\sigma_2 - \cos \frac{2\pi}{N_1})} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε  $\sigma_2 \rightarrow 0$ ,  $N_1 \rightarrow \infty$  και  $N_2$  σταθερό, επομένως από την (4.29) έχουμε ότι

$$\frac{RR(E\Delta X, M)}{RR(E\Delta X, T)} \simeq \frac{8}{2} = 4 \quad (4.30)$$

- Για  $N_1, N_2$  περιττοί και  $N_1 \gg N_2$  έχουμε,

$$\gamma_{EDF,T}^{opt} = \frac{\cos \frac{\pi}{N_1} + \cos \frac{2\pi}{N_1} + 2\sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}{2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}) + \cos \frac{\pi}{N_1} - \cos \frac{2\pi}{N_1}} \quad (4.31)$$

$$\gamma_{EDF,M}^{opt} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{N_1} + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}{2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \text{Από (4.31),(4.32) έχουμε ότι } \frac{RR(E\Delta X,M)}{RR(E\Delta X,T)} &= \frac{\frac{2+\sigma_2(1+\cos \frac{\pi}{N_2})}{2-2 \cos \frac{\pi}{N_1}}}{\frac{2+\sigma_2(1+\cos \frac{\pi}{N_2})+\cos \frac{\pi}{N_1}-\cos \frac{2\pi}{N_1}}{2-2 \cos \frac{2\pi}{N_1}}} \\ &= \frac{2(1 - \cos \frac{2\pi}{N_1})(2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}))}{2(1 - \cos \frac{\pi}{N_1})(2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}) + \cos \frac{\pi}{N_1} - \cos \frac{2\pi}{N_1})} \\ &\quad \frac{(1 - \cos \frac{2\pi}{N_1})(2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}))}{(1 - \cos \frac{\pi}{N_1})(2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}) + \cos \frac{\pi}{N_1} - \cos \frac{2\pi}{N_1})} \\ &= \frac{2(1 - \cos \frac{\pi}{N_1})(1 + \cos \frac{\pi}{N_1})(2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}))}{(1 - \cos \frac{\pi}{N_1})(2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}) + \cos \frac{\pi}{N_1} - \cos \frac{2\pi}{N_1})} \end{aligned}$$

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

$$\frac{2(1 + \cos \frac{\pi}{N_1})(2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}))}{2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}) + \cos \frac{\pi}{N_1} - \cos \frac{2\pi}{N_1}} \quad (4.33)$$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε  $\sigma_2 \rightarrow 0$ ,  $N_1 \rightarrow \infty$  και  $N_2$  σταθερό, επομένως από την (4.33) έχουμε ότι

$$\frac{RR(E\Delta X, M)}{RR(E\Delta X, T)} \simeq \frac{8}{2} = 4 \quad (4.34)$$

- Για  $N_1$  άρτιο και  $N_2$  περιττό και  $N_1 \gg N_2$  έχουμε,

$$\gamma_{EDF,T}^{opt} = \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{N_1} + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}{3 - \cos \frac{2\pi}{N_1} + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})} \quad (4.35)$$

$$\gamma_{EDF,M}^{opt} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{N_1} + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}{2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})} \quad (4.36)$$

Από (4.35),(4.36) έχουμε ότι  $\frac{RR(E\Delta X, M)}{RR(E\Delta X, T)} = \frac{\frac{2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}{2 - 2 \cos \frac{\pi}{N_1}}}{\frac{3 - \cos \frac{2\pi}{N_1} + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}{2 - 2 \cos \frac{2\pi}{N_1}}} =$

$$= \frac{2(1 - \cos \frac{2\pi}{N_1})(2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}))}{2(1 - \cos \frac{\pi}{N_1})(3 - \cos \frac{2\pi}{N_1} + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}))}$$

$$= \frac{(1 - \cos \frac{2\pi}{N_1})(2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}))}{(1 - \cos \frac{\pi}{N_1})(3 - \cos \frac{2\pi}{N_1} + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}))}$$

$$= \frac{2(1 - \cos \frac{\pi}{N_1})(1 + \cos \frac{\pi}{N_1})(2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}))}{(1 - \cos \frac{\pi}{N_1})(3 - \cos \frac{2\pi}{N_1} + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}))}$$

$$= \frac{2(1 + \cos \frac{\pi}{N_1})(2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}))}{3 - \cos \frac{2\pi}{N_1} + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})} \quad (4.37)$$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε  $\sigma_2 \rightarrow 0$ ,  $N_1 \rightarrow \infty$  και  $N_2$  σταθερό, επομένως από την (4.37) έχουμε ότι

$$\frac{RR(E\Delta X, M)}{RR(E\Delta X, T)} \simeq \frac{8}{2} = 4 \quad (4.38)$$

- Για  $N_1$  περιττό και  $N_2$  άρτιο και  $N_1 \gg N_2$  έχουμε,

$$\gamma_{EDF,T}^{opt} = \frac{2\sigma_2 + \cos \frac{\pi}{N_1} + \cos \frac{2\pi}{N_1}}{2 + 2\sigma_2 + \cos \frac{\pi}{N_1} - \cos \frac{2\pi}{N_1}} \quad (4.39)$$

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

$$\gamma_{EDF,M}^{opt} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{N_1} + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}{2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})} \quad (4.40)$$

Από (4.39),(4.40) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{RR(E\Delta X, M)}{RR(E\Delta X, T)} &= \frac{\frac{2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2})}{2 - 2 \cos \frac{\pi}{N_1}}}{\frac{2 + 2\sigma_2 + \cos \frac{\pi}{N_1} - \cos \frac{2\pi}{N_1}}{2 - 2 \cos \frac{2\pi}{N_1}}} = \\ &= \frac{2(1 - \cos \frac{2\pi}{N_1})(2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}))}{2(1 - \cos \frac{\pi}{N_1})(2 + 2\sigma_2 + \cos \frac{\pi}{N_1} - \cos \frac{2\pi}{N_1})} \\ &= \frac{(1 - \cos \frac{2\pi}{N_1})(2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}))}{(1 - \cos \frac{\pi}{N_1})(2 + 2\sigma_2 + \cos \frac{\pi}{N_1} - \cos \frac{2\pi}{N_1})} \\ &= \frac{2(1 - \cos \frac{\pi}{N_1})(1 + \cos \frac{\pi}{N_1})(2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}))}{(1 - \cos \frac{\pi}{N_1})(2 + 2\sigma_2 + \cos \frac{\pi}{N_1} - \cos \frac{2\pi}{N_1})} \\ &= \frac{2(1 + \cos \frac{\pi}{N_1})(2 + \sigma_2(1 + \cos \frac{\pi}{N_2}))}{2 + 2\sigma_2 + \cos \frac{\pi}{N_1} - \cos \frac{2\pi}{N_1}} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε  $\sigma_2 \rightarrow 0$ ,  $N_1 \rightarrow \infty$  και  $N_2$  σταθερό, επομένως από την (4.41) έχουμε ότι

$$\frac{RR(E\Delta X, M)}{RR(E\Delta X, T)} \simeq \frac{8}{2} = 4 \quad (4.42)$$

Επομένως στην ΕΔΧ, το αναδιπλούμενο πλέγμα είναι γρηγορότερο κατά τέσσερις φορές από το πλέγμα. Οι Xu και Lau αναφέρουν ότι η ΕΔΧ στο αναδιπλούμενο πλέγμα συγκλίνει πιο γρήγορα σε σχέση με το πλέγμα αλλά δεν αναφέρουν κάτι για την συσχέτιση των ρυθμών σύγκλισης, οπότε το ανωτέρω αποτελεί ένα νέο αποτέλεσμα.

## Κεφάλαιο 5

### Αριθμητικά αποτελέσματα

#### 5.1 Σύγκριση ΔΧ και ΕΔΧ για τοπολογία πλέγματος

Για τα αριθμητικά αποτελέσματα αρχικοποιούμε τα φορτία στους επεξεργαστές με τυχαίο τρόπο και ως συνθήκη τερματισμού έχουμε ότι το σχετικό σφάλμα πρέπει να είναι μικρότερο του  $10^{-6}$

$N_1 \times N_2$	ΔΧ	ΕΔΧ	Λόγος επαναλήψεων ΔΧ/ΕΔΧ
5×5	131	131	1
5×11	596	379	1.57
5×21	2,167	1,198	1.80
5×51	11,774	6,290	1.87
5×101	47,103	24,997	1.88
6×6	181	181	1
6×10	496	361	1.37
6×20	1,634	1,098	1.49
6×50	11,677	6,379	1.83
6×100	46,621	24,470	1.90

Πίνακας 5.1: Σύγκριση των επαναλήψεων για την ΔΧ και ΕΔΧ σε τοπολογία πλέγματος

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

## 5.2 Σύγκριση αναδιπλούμενου πλέγματος και πλέγματος για την ΕΔΧ

### 5.2.1 Άρτιες ή Περιττές διαστάσεις

Ομοίως με πριν για την αρχικοποίηση και την συνθήκη σύγκλισης.

$N_1 \times N_2$	Αναδ. Πλέγμα	Πλέγμα	Λόγος Πλέγμα/Αναδ.	RR(Πλέγμα)/RR(Αναδ.)
5×5	36	131	3.63	3.1
5×11	98	379	3.87	3.57
5×21	308	1,198	3.89	3.86
5×51	1,704	6,379	3.74	3.97
5×101	6,647	24,997	3.76	3.99
6×6	53	181	3.41	3.21
6×10	97	361	3.72	3.54
6×20	291	1,098	3.77	3.85
6×50	1,633	6,379	3.91	3.97
6×100	6,270	24,470	3.90	3.99

Πίνακας 5.2: Σύγκριση των επαναλήψεων της ΕΔΧ για το αναδιπλούμενο πλέγμα και πλέγμα

### 5.2.2 Η μικτή περίπτωση

Ομοίως με πριν για την αρχικοποίηση και την συνθήκη σύγκλισης.

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

$N_1 \times N_2$	Αναδ. Πλέγμα	Πλέγμα	Λόγος Πλέγμα/Αναδ.	RR(Πλέγμα)/RR(Αναδ.)
5×6	44	160	3.63	3.1
5×10	85	307	3.61	3.5
5×20	284	1,041	3.67	3.84
5×50	1,590	6,300	3.96	3.97
5×100	6,110	23,483	3.84	3.99
6×5	44	150	3.40	3.1
6×11	109	414	3.80	3.59
6×21	309	1,170	3.79	3.86
6×51	1,643	6,545	3.98	3.97
6×101	6,346	24,544	3.87	3.99

Πίνακας 5.3: Σύγκριση των επαναλήψεων της ΕΔΧ για το αναδιπλούμενο πλέγμα και πλέγμα, μικτή περίπτωση

## Κεφάλαιο 6

### Συμπεράσματα - Μελλοντικό ερευνητικό έργο

#### 6.1 Τι μελετήθηκε θεωρητικά

- Αναδιπλούμενο πλέγμα
- Πλέγμα

Η θεωρία του αναδιπλούμενου πλέγματος έχει παρουσιασθεί στην [9] ενώ τα αποτελέσματα για το πλέγμα είναι νέα.

#### 6.2 Απαντήσεις που δόθηκαν με αυτή την διπλωματική

Η διπλωματική αυτή ήθελε να απαντήσει στα ακόλουθα ερωτήματα:

1. Αν η ΕΔΧ είναι καλύτερη της ΔΧ για το πλέγμα.
2. Ποια η συμπεριφορά της ΕΔΧ για το επίμηκες πλέγμα·
3. Πόσο καλύτερη είναι η ΕΔΧ για το αναδιπλούμενο πλέγμα σε σύγκριση με το πλέγμα·

Οι αντίστοιχες απαντήσεις στα ανωτέρω ερωτήματα είναι οι ακόλουθες:

1. Η ΕΔΧ όπως αποδείχθηκε στην ενότητα 4.3 είναι καλύτερη της ΔΧ για το πλέγμα.
2. Η ΕΔΧ για το επίμηκες πλέγμα, σύμφωνα με τη ενότητα 4.4 συμπεριφέρεται όμοια με το αναδιπλούμενο πλέγμα και ο ρυθμός σύγκλισής της είναι δύο φορές μεγαλύτερος από της ΔΧ.
3. Σύμφωνα με την ενότητα 4.5 η ΕΔΧ για το αναδιπλούμενο είναι γρηγορότερη κατά τέσσερις φορές σε σχέση με την ΕΔΧ για το πλέγμα.

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

### 6.3 Μελλοντικό Ερευνητικό Έργο

- Να μελετηθεί το  $n$ -διάστατο πλέγμα

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

### Π.1 Τεχνικά Χαρακτηριστικά

Η υλοποίηση της θεωρίας πραγματοποιήθηκε με την γλώσσα προγραμματισμού *C* σε περιβάλλον *linux*. Η εφαρμογή έχει δοκιμαστεί σε *Centos5.2*, *Suse* και *Scientific linux*. Περισσότερες πληροφορίες υπάρχουν στο *cd*.

### Π.2 Κώδικας

#### Εισαγωγή Δεδομένων

```
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <stdlib.h>
#include <malloc.h>
#include <math.h>
#include <time.h>
#include <ctype.h>

void Display_Message(int argc);
int Read_parameter(char *inputfile, int *N1, int *N2, int *max_iter,
double *tol, int *m, int *kappa, double *temp);
void Help_Insert(char *tmp, char *dmp, void *var, FILE *fp, char type);
double *v_get(int Nmax);
void m_init(int N1, int N2, double **pinax);
double **m_get(int nr, int nc);
int free_dmatrix(double **m,int nr,int nc);
int free_vmatrix(double *m);
void Random_matrix_gen(double **Mat, int N1, int N2);
void Matrix_To_File(FILE *fp, int N1, int N2);
void Print_Matrix(double **Mat, int N1, int N2);
double Norma_2(double **Mat, int N1, int N2, double Average);
```

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

```
double Norma_22(double **Mat, int N1, int N2, double **Average);
void Read_From_File(FILE *fp, double **mat, int N1, int N2);

#include "DF_Schemes.c"
#include "2nd_peirama_EDF_Schemes.c"
#include "MESH_EDF_Schemes.c"
#include "Mesh_DF_Schemes.c"

int main(int argc, char **argv)
{
double tol; // Tolerance
int max_iter; // Max number of iterations
int N1; // Number of processors in vertical axis
int N2; // Number of processors in horizontal axis
int steps; // Number of steps
int m;
int kappa;
double temp;
FILE *fp;

/* Displays a message if number of parameters is wrong */
Display_Message(argc);

char *filename = argv[1];

/* Read parameter values from file */
Read_parameter(filename, &N1, &N2, &max_iter, &tol, &m, &kappa, &temp);

if( (fp = (FILE*)fopen("values", "w+")) == NULL) perror("fopen"), exit(1);
Matrix_To_File(fp, N1, N2);
fclose(fp);

/* Diffusion method */
steps = DF_TORUS(tol, max_iter, N1, N2);
printf("DF, steps = %d\n\n", steps);

/* Extrapolated Diffusion Method */
steps = EDF_TORUS_2peirama(tol, max_iter, N1, N2);
printf("2nd_peirama_EDF, steps = %d\n\n", steps);

/* Diffusion method */
steps = DF_MESH(tol, max_iter, N1, N2);
printf("DF, steps = %d\n\n", steps);

/* Extrapolated Diffusion Method */
steps = EDF_MESH(tol, max_iter, N1, N2);
```

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

```
printf("mesh_EDF, steps = %d\n\n", steps);

//printf("*****\n");
//getc(stdin);

    return 0;
}

// Function which reads the matrix from the file named "values"
void Read_From_File(FILE *fp, double **mat, int N1, int N2)
{
register int i, j;
int a;

for(i = 0; i < N1; i++)
    for(j = 0; j < N2; j++) {
        fscanf(fp,"%lf ", &mat[i][j]);
    }

return;
}

// Function which generates a random matrix and prints it to a file
void Matrix_To_File(FILE *fp, int N1, int N2)
{
register int i, j;

srand(time(NULL));

for(i = 0; i < N1; i++) {
    for(j = 0; j < N2; j++)
fprintf(fp,"%d ", 1+(int) (100.0*rand()/(RAND_MAX+1.0)));
        fprintf(fp,"\n");
}

return;
}

// Function which computes the max norma of a matrix
double Norma_22(double **Mat, int N1, int N2, double **Average)
{
double sum = 0.0;
register int i, j;

for(i = 0; i < N1; i++)
    for(j = 0; j < N2; j++)
```

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

```
        sum = sum + (Mat[i][j]-Average[i][j])*(Mat[i][j]
            -Average[i][j]);

sum = sqrt(sum);

return sum;
}

double Norma_2(double **Mat, int N1, int N2, double Average)
{
double sum = 0.0;
register int i, j;

for(i = 0; i < N1; i++)
    for(j = 0; j < N2; j++)
        sum = sum + (Mat[i][j]-Average)*(Mat[i][j]-Average);

sum = sqrt(sum);

return sum;
}

// Function which gives random numbers to all elements of a matrix
void Random_matrix_gen(double **Mat, int N1, int N2)
{
register int i, j;

for(i = 0; i < N1; i++)
    for(j = 0; j < N2; j++)
        Mat[i][j] = rand()%100;

return;
}

// Function which prints a matrix on the screen
void Print_Matrix(double **Mat, int N1, int N2)
{
register int i, j;

for(i = 0; i < N1; i++) {
    for(j = 0; j < N2; j++) {
        printf("%.3lf ", Mat[i][j]);
    }
    printf("\n");
}
}
```

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

```
printf("\n");
return;
}

/*Function which controls if have inserted all the needed parameters
 * from the command line.the proper usage is './a.out filename'.If
 * the name of the filename does not exist then a message displayed
 * on the screen*/
void Display_Message(int argc)
{
    system("clear");

    if(argc == 1)
    {
        fprintf(stdout, "\nError: Wrong number of parameters...");
        fprintf(stdout, "\n\nUsage:\n  ./x filename\n");
        fprintf(stdout, "\n\n  Where:");
        fprintf(stdout, "\n\tfilename = \"The name of input data
        file\"\n\n");
        exit(1);
    }
    return;
}

/*This function read all program parameters and store them at the
 * variables.The name of the file is given from the command line.
 * This function return a value may be used for error handling*/
int Read_parameter(char *inputfile, int *N1, int *N2,
                   int *max_iter, double *tol,
int *m, int *kappa, double *temp)
{
    FILE *fp1;
    char tmp[80], dmp[3];
    if( (fp1 = (FILE*)fopen(inputfile, "r+")) == NULL )
        fprintf(stderr, "Error opening file.\n"), exit(1);

    Help_Insert(tmp, dmp, &(*N1), fp1, 'i');
    Help_Insert(tmp, dmp, &(*N2), fp1, 'i');
    Help_Insert(tmp, dmp, &(*max_iter), fp1, 'i');
    Help_Insert(tmp, dmp, &(*tol), fp1, 'd');
    Help_Insert(tmp, dmp, &(*m), fp1, 'i');
    Help_Insert(tmp, dmp, &(*kappa), fp1, 'i');
    Help_Insert(tmp, dmp, &(*temp), fp1, 'd');
    fclose(fp1);
}
```

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

```
    return 0;
}

/*function which provides us a method to insert the values from the
 * data file with the call of one function for each variable*/
void Help_Insert(char *tmp, char *dmp, void *var, FILE *fp, char type)
{
    switch (type)
    {
        case 'i':
        {
            fgets(tmp,80,fp);
            //printf("%s\n",tmp);
            fscanf(fp,"%d",&*((int *)var));
            //printf("%1.3d\n",*((int *)var));
            fgets(dmp,3,fp);
            break;
        }
        case 'd':
        {
            fgets(tmp,80,fp);
            //printf("%s\n",tmp);
            fscanf(fp,"%lf",&*((double *)var));
            //printf("%1.3lf\n",*((double *)var));
            fgets(dmp,3,fp);
            break;
        }
    }
    return;
}

/*Sunarthsh poy elegxei an yparxei xwros na desmeytei apo thn malloc*/
/*Xrhsimopoiieitai gia th dhmioyrgreia dianysmatwn*/
double *v_get(int Nmax)
{
    register int i;
    double *ptr;

    ptr = (double*)malloc((Nmax+1)*sizeof(double));

    if(ptr == NULL) {
        fprintf(stdout,"Not enough memory to allocate the buffer\n\n");
        exit(1);
    }
}
```

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

```
    for(i = 0; i < Nmax+1; i++)
        *(ptr+i) = 0.;

    return ptr;
}

/* This function initializes 2-d matrix to zero */
void m_init(int N1, int N2, double **pinax)
{
    register int i, j;

    for(i = 0; i < N1; i++)
        for(j = 0; j < N2; j++)
            pinax[i][j] = 0.;

    return;
}

/* Function which allocates space for a two dimensioned matrix .
   The matrix has nr rows and nc cols*/
double **m_get(int nr, int nc)
{
    int i;
    double **m;

    if( (m = (double**)calloc(nr,(unsigned)sizeof(double*))) == NULL)
    {
        printf("no more memory\n"), exit(0);
    }

    for(i = 0; i <= nr-1; i++) {
        if ( (m[i] = (double*)calloc(nc,(unsigned)sizeof(double))) ==
        NULL) {
            printf("no more memory\n"), exit(0);
        }
    }

    m_init(nr,nc,m);

    return (m);
}

/*SYNARTHSH POY APELEYTHERAWNEI TO XWRO POY EXEI DESMEYTEI GIA ENA
 * PINAKA DYO DIASTASEWN*/
int free_dmatrix(double **m,int nr,int nc)
{

```

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

```
register int i;

/* for (i=nr-1;i>=0;i--) */
for (i=0 ; i < nr; i++) {
    free( (double*)m[i] );
}
free( (double*)m );
return(0);
}

/*SYNARTHSH POY APELEYTHERAWNEI TO XWRO POY EXEI DESMEYTEI GIA ENA
DIANYSMA*/
int free_vmatrix(double *m)
{
    free(m);
    return 0;
}
```

## Αναδιπλούμενο Πλέγμα

### ΔΧ

```
// Function which implements the diffusion method
int DF_TORUS(double tol, int max_iter, int N1, int N2)
{
int steps = 0;
int max = 0;
register int i, j;
double Average_W = 0.0, sums, sumu;
double sigma_2 = 0.0;
double norm = 0.0;
double T;
double **W = m_get(N1,N2);
double **S = m_get(N1,N2);
double **LL = m_get(N1,N2);
double **Temp = m_get(N1,N2);
FILE *fp;

// Reads the random generated matrix from file "values"
if( (fp = (FILE*)fopen("values","r+")) == NULL) perror("fopen"), exit(1);
Read_From_File(fp,W,N1,N2);
fclose (fp);
```

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

```
// Finds the max of N1, N2
if(N1 >= N2)
max = N1;
else
max = N2;

// Choose the value of T depending on number of processors
// in each dimension
if((N1%2 == 0) && (N2%2 == 0))
    T = 1./(5. - cos(2.*M_PI/(double)max));
else if((N1%2 != 0) && (N2%2 != 0))
    T = 1./(3. + cos(M_PI/(double)N1)
        + cos(M_PI/(double)N2) -
        cos(2.*M_PI/(double)max));
else exit(1);

printf("T = %lf\n", T);

for(i = 0; i < N1; i++)
{
    for( j = 0; j < N2; j++)
    {
        S[i][j]=1;
    }
}

sums=0.0;
sumu=0.0;
for(i = 0; i < N1; i++)
{
    for( j = 0; j < N2; j++)
    {
        sums=sums+S[i][j];
        sumu=sumu+W[i][j];
    }
}

for(i = 0; i < N1; i++)
    for(j = 0; j < N2; j++)
    {
        LL[i][j]=sumu*S[i][j]/sums;
    }
```

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

```
// Computation of average value
for(i = 0; i < N1; i++)
    for(j = 0; j < N2; j++)
        Average_W += W[i][j];
Average_W /= N1*N2;

// Computation of ||U(0) - U_bar||_2
for(i = 0; i < N1; i++)
    for(j = 0; j < N2; j++)
        norm = norm + (W[i][j]-LL[i][j])*(W[i][j]-LL[i][j]);
//
norm = norm + (W[i][j]-Average_W)*(W[i][j]-Average_W);
norm = sqrt(norm);

//printf("Average_W : %lf\n", Average_W);

while(steps < max_iter) {

// Inner points
for(i = 1; i <= N1-2; i++)
    for(j = 1; j <= N2-2; j++)
        Temp[i][j] = W[i][j] - T*(4*W[i][j] - W[i-1][j] -
            W[i+1][j] - W[i][j-1] - W[i][j+1]);

// North points
for(j = 1; j <= N2-2; j++)
    Temp[0][j] = W[0][j] - T*(4*W[0][j] - W[N1-1][j] - W[1][j]
        - W[0][j-1] - W[0][j+1]);

// South points
for(j = 1; j <= N2-2; j++)
    Temp[N1-1][j] = W[N1-1][j] - T*(4*W[N1-1][j] - W[N1-1][j-1]
        - W[N1-1][j+1] - W[N1-2][j] - W[0][j]);

// West points
for(i = 1; i <= N1-2; i++)
    Temp[i][0] = W[i][0] - T*(4*W[i][0] - W[i][N2-1] - W[i][1]
        - W[i-1][0] - W[i+1][0]);

// East points
for(i = 1; i <= N1-2; i++)
    Temp[i][N2-1] = W[i][N2-1] - T*(4*W[i][N2-1] - W[i][N2-2] - W[i][0]
        - W[i-1][N2-1] - W[i+1][N2-1]);

// Four corner points
Temp[0][0] = W[0][0] - T*(4*W[0][0] - W[N1-1][0] - W[1][0] - W[0][N2-1]
```

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

```
        - W[0][1]);
Temp[0][N2-1] = W[0][N2-1] - T*(4*W[0][N2-1] - W[0][N2-2] - W[0][0]
        - W[N1-1][N2-1] - W[1][N2-1]);
Temp[N1-1][0] = W[N1-1][0] - T*(4*W[N1-1][0] - W[N1-2][0] - W[0][0]
        - W[N1-1][N2-1] - W[N1-1][1]);
Temp[N1-1][N2-1] = W[N1-1][N2-1] - T*(4*W[N1-1][N2-1] - W[N1-1][N2-2]
        - W[N1-1][0] - W[N1-2][N2-1] - W[0][N2-1]);

// if(Norma_2(W,N1,N2,Average_W)/norm < tol) break;
if(Norma_22(Temp,N1,N2,LL)/norm < tol) break;

// Copy Temp to W
for(i = 0; i < N1; i++)
    for(j = 0; j < N2; j++)
        W[i][j] = Temp[i][j];

// Increase the number of steps
steps++;
}

//Print_Matrix(W,N1,N2);

return steps;
}

\subsection*{EDQ}
% \en
% \lstinputlisting{kodikas/2nd_peirama_EDF_Schemes.c}
% \gr

// Function which implements the extrapolated diffusion method
int EDF_TORUS_2peirama(double tol, int max_iter, int N1, int N2)
{
int steps = 0;
register int i, j;
double Average_W = 0.0, sums, sumu;
double sigma_2 = 0.0;
double norm = 0.0;
    double *C1 = v_get(N1);
    double *C2 = v_get(N2);

double T;
```

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

```
double **W = m_get(N1,N2);
double **w1 = m_get(N1,N2);
double **w2 = m_get(N1,N2);
    double **S = m_get(N1,N2);
    double **LL = m_get(N1,N2);

double **Temp = m_get(N1,N2);
FILE *fp;

// Reads the random generated matrix from file "values"
if( (fp = (FILE*)fopen("values","r+")) == NULL) perror("fopen"), exit(1);
Read_From_File(fp,W,N1,N2);
fclose (fp);

// Computation of sigma_2
sigma_2 = (1. - cos((2.*M_PI)/(double)N1))/(1. -
    cos((2.*M_PI)/(double)N2));

    srand(time(NULL));

for(i=0;i<N1;i++)
{
    for(j=0;j<N2;j++)
    {

        w1[i][j] = (double)((100.0*rand()/(RAND_MAX+1.0)));
    }
}
srand(time(NULL) + 10000*j);

for(i=0;i<N1;i++)
    for(j=0;j<N2;j++)
    {
        w2[i][j] = (double)((100.0*rand()/(RAND_MAX+1.0)));
    }

for(i = 0; i < N1; i++)
{
    for( j = 0; j < N2; j++)
    {
        S[i][j]=1;
    }
}
```

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

```
sums=0.0;
sumu=0.0;
for(i = 0; i < N1; i++)
{
    for( j = 0; j < N2; j++)
    {
        sums=sums+S[i][j];
        sumu=sumu+W[i][j];
    }
}

for(i = 0; i < N1; i++)
    for(j = 0; j < N2; j++)
    {
        LL[i][j]=sumu*S[i][j]/sums;
    }

for(i = 0; i < N1; i++)
{
    // C1[i] = 1+(int) (1.0*rand()/(RAND_MAX+1.0));
    C1[i] = 1;
    for( j = 0; j < N2; j++)
        C2[j] = sigma_2*C1[i];
}

// Choose the value of T depending on number of processors
// in each dimension
if((N1%2 == 0) && (N2%2 == 0))
    T = 1./(3. + 2.*sigma_2 - cos(2.*M_PI/(double)N1));
else if((N1%2 != 0) && (N2%2 != 0))
    T = 1./(2. + sigma_2*(1.+cos(M_PI/(double)N2))
        + cos(M_PI/(double)N1) - cos(2.*M_PI/(double)N1));
else exit(1);

printf("T = %lf\n", T);

// Computation of average value
for(i = 0; i < N1; i++)
    for(j = 0; j < N2; j++)
        Average_W += W[i][j];
Average_W /= N1*N2;

// Computation of  $||U(0) - U_{bar}||_2$ 
```

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

```
for(i = 0; i < N1; i++)
    for(j = 0; j < N2; j++)
        norm = norm + (W[i][j]-LL[i][j])*(W[i][j]-LL[i][j]);
//          norm = norm + (W[i][j]-Average_W)*(W[i][j]-Average_W);
norm = sqrt(norm);

while(steps < max_iter) {

// Inner points
for(i = 1; i <= N1-2; i++)
    for(j = 1; j <= N2-2; j++)
        Temp[i][j] = W[i][j] - T*C2[j]*(2*W[i][j] - W[i][j-1] - W[i][j+1])
            - T*C1[i]*(2*W[i][j] - W[i-1][j] - W[i+1][j]);

// North points
for(j = 1; j <= N2-2; j++)
    Temp[0][j] = W[0][j] - T*C2[j]*(2*W[0][j] - W[0][j-1] -
        W[0][j+1]) - T*C1[0]*(2*W[0][j] - W[N1-1][j] - W[1][j]);

// South points
for(j = 1; j <= N2-2; j++)
    Temp[N1-1][j] = W[N1-1][j] - T*C2[j]*(2*W[N1-1][j] - W[N1-1][j-1]
        - W[N1-1][j+1]) - T*C1[N1-1]*(2*W[N1-1][j]
        - W[N1-2][j] - W[0][j]);

// West points
for(i = 1; i <= N1-2; i++)
    Temp[i][0] = W[i][0] - T*C2[0]*(2*W[i][0] - W[i][N2-1] - W[i][1])
        - T*C1[i]*(2*W[i][0] - W[i-1][0] - W[i+1][0]);

// East points
for(i = 1; i <= N1-2; i++)
    Temp[i][N2-1] = W[i][N2-1] - T*C2[N2-1]*(2*W[i][N2-1] - W[i][N2-2]
        - W[i][0]) - T*C1[i]*(2*W[i][N2-1]
        - W[i-1][N2-1] - W[i+1][N2-1]);

// Four corner points
Temp[0][0] = W[0][0] - T*C2[0]*(2*W[0][0] - W[0][N2-1] - W[0][1])
    - T*C1[0]*(2*W[0][0] - W[N1-1][0] - W[1][0]);

Temp[0][N2-1] = W[0][N2-1] - T*C2[N2-1]*(2*W[0][N2-1] - W[0][N2-2]
    - W[0][0]) - T*C1[0]*(2*W[0][N2-1]
    - W[N1-1][N2-1] - W[1][N2-1]);

Temp[N1-1][0] = W[N1-1][0] - T*C2[0]*(2*W[N1-1][0] - W[N1-1][N2-1]
    - W[N1-1][1]) - T*C1[N1-1]*(2*W[N1-1][0]
```

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

```
        - W[N1-2][0] - W[0][0]);

Temp[N1-1][N2-1] = W[N1-1][N2-1] - T*C2[N2-1]*(2*W[N1-1][N2-1]
        - W[N1-1][N2-2] - W[N1-1][0]) - T*C1[N1-1]*
        (2*W[N1-1][N2-1] - W[N1-2][N2-1] - W[0][N2-1]);

if(Norma_22(Temp,N1,N2,LL)/norm < tol) break;

// Copy Temp to W
for(i = 0; i < N1; i++)
    for(j = 0; j < N2; j++)
        W[i][j] = Temp[i][j];

// Increase the number of steps
steps++;
}

return steps;
}
```

## Πλέγμα

### $\Delta X$

```
// Function which implements the diffusion method
int DF_MESH(double tol, int max_iter, int N1, int N2)
{
int steps = 0;
int max = 0;
register int i, j;
double Average_W = 0.0, sumu, sums;
double sigma_2 = 0.0;
double norm = 0.0;
double T;
double **W = m_get(N1,N2);
double **S = m_get(N1,N2);
double **LL = m_get(N1,N2);
double **Temp = m_get(N1,N2);
FILE *fp;

// Reads the random generated matrix from file "values"
```

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

```
if( (fp = (FILE*)fopen("values","r+")) == NULL) perror("fopen"), exit(1);
Read_From_File(fp,W,N1,N2);
fclose (fp);

// Finds the max of N1, N2
if(N1 >= N2)
T = 1./(3. + cos(M_PI/(double)N2));
else
T = 1./(3. + cos(M_PI/(double)N1));

// // Finds the max of N1, N2
// if(N1 >= N2)
// T = 1./(1. - cos(M_PI/(double)N2));
// else
// T = 1./(1. - cos(M_PI/(double)N1));

printf("T = %lf\n", T);

for(i = 0; i < N1; i++)
{
    for( j = 0; j < N2; j++)
    {
        S[i][j]=1;
    }
}

sums=0.0;
sumu=0.0;
for(i = 0; i < N1; i++)
{
    for( j = 0; j < N2; j++)
    {
        sums=sums+S[i][j];
        sumu=sumu+W[i][j];
    }
}

for(i = 0; i < N1; i++)
    for(j = 0; j < N2; j++)
    {
```

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

```
        LL[i][j]=sumu*S[i][j]/sums;
    }

// Computation of average value
for(i = 0; i < N1; i++)
    for(j = 0; j < N2; j++)
        Average_W += W[i][j];
Average_W /= N1*N2;

// Computation of ||U(0) - U_bar||_2
for(i = 0; i < N1; i++)
    for(j = 0; j < N2; j++)
        norm = norm + (W[i][j]-LL[i][j])*(W[i][j]-LL[i][j]);
//          norm = norm + (W[i][j]-Average_W)*(W[i][j]-Average_W);
norm = sqrt(norm);

//printf("Average_W : %lf\n", Average_W);

while(steps < max_iter) {

// Inner points
for(i = 1; i <= N1-2; i++)
    for(j = 1; j <= N2-2; j++)
        Temp[i][j] = W[i][j] - T*(4*W[i][j] - W[i-1][j] - W[i+1][j]
            - W[i][j-1] - W[i][j+1]);

// North points
for(j = 1; j <= N2-2; j++)
    Temp[0][j] = W[0][j] - T*(3*W[0][j] - W[1][j] - W[0][j-1]
        - W[0][j+1]);

// South points
for(j = 1; j <= N2-2; j++)
    Temp[N1-1][j] = W[N1-1][j] - T*(3*W[N1-1][j] -
        W[N1-1][j-1] - W[N1-1][j+1] - W[N1-2][j]);

// West points
for(i = 1; i <= N1-2; i++)
    Temp[i][0] = W[i][0] - T*(3*W[i][0] - W[i][1] -
        W[i-1][0] - W[i+1][0]);

// East points
for(i = 1; i <= N1-2; i++)
    Temp[i][N2-1] = W[i][N2-1] - T*(3*W[i][N2-1] -
        W[i][N2-2] - W[i-1][N2-1] - W[i+1][N2-1]);
```

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

```
// Four corner points
Temp[0][0] = W[0][0] - T*(2*W[0][0] - W[1][0] - W[0][1]);
Temp[0][N2-1] = W[0][N2-1] - T*(2*W[0][N2-1] - W[0][N2-2] - W[1][N2-1]);
Temp[N1-1][0] = W[N1-1][0] - T*(2*W[N1-1][0] - W[N1-2][0] - W[N1-1][1]);
Temp[N1-1][N2-1] = W[N1-1][N2-1] - T*(2*W[N1-1][N2-1] - W[N1-1][N2-2]
-W[N1-2][N2-1]);

// Termination creterion
// if(Norma_2(W,N1,N2,Average_W)/norm < tol) break;
if(Norma_22(Temp,N1,N2,LL)/norm < tol) break;

// Copy Temp to W
for(i = 0; i < N1; i++)
    for(j = 0; j < N2; j++)
        W[i][j] = Temp[i][j];

// Increase the number of steps
steps++;
}

//Print_Matrix(W,N1,N2);

return steps;
}
```

## ΕΔΧ

```
/*
MESH

*/

// Function which implements the extrapolated diffusion method
int EDF_MESH(double tol, int max_iter, int N1, int N2)
{
int steps = 0;
register int i, j;
double Average_W = 0.0, sums, sumu;
double sigma_2 = 0.0;
double norm = 0.0;
double *C1 = v_get(N1);
double *C2 = v_get(N2);
double T;
```

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

```
double **W = m_get(N1,N2);
double **S = m_get(N1,N2);
double **LL = m_get(N1,N2);
double **Temp = m_get(N1,N2);
FILE *fp;

// Reads the random generated matrix from file "values"
if( (fp = (FILE*)fopen("values","r+")) == NULL) perror("fopen"),
exit(1);
Read_From_File(fp,W,N1,N2);
fclose (fp);

// Computation of sigma_2
sigma_2 = (1. - cos((M_PI)/(double)N1))/(1. -
cos((M_PI)/(double)N2));

for(i = 0; i < N1; i++)
{
//      C1[i] = 1+(int) (1.0*rand()/(RAND_MAX+1.0));
  C1[i] = 1;
      for( j = 0; j < N2; j++)
          C2[j] = sigma_2*C1[i];
}

for(i = 0; i < N1; i++)
{
  for( j = 0; j < N2; j++)
  {
    S[i][j]=1;
  }
}

sums=0.0;
sumu=0.0;
for(i = 0; i < N1; i++)
{
  for( j = 0; j < N2; j++)
  {
    sums=sums+S[i][j];
    sumu=sumu+W[i][j];
  }
}

for(i = 0; i < N1; i++)
```

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

```
        for(j = 0; j < N2; j++)
        {
            LL[i][j]=sumu*S[i][j]/sums;
        }

// Choose the value of T depending on number of
// processors in each dimension

if(N1 >= N2)
T = 1./(2. + sigma_2*(1+ cos(M_PI/(double)N2)));
else
T = 1./(2.*sigma_2 + 1+ cos(M_PI/(double)N1));

// if((N1%2 == 0) && (N2%2 == 0))
// T = 1./(3. + 2.*sigma_2 - cos(M_PI/(double)N1));
// else if((N1%2 != 0) && (N2%2 != 0))
// T = 1./(2. + sigma_2*(1.+cos(M_PI/(double)(2.*N2))) +
// cos(M_PI/(double)(2.*N1)) - cos(M_PI/(double)N1));
// else exit(1);

printf("T = %lf\n", T);

// Computation of average value
for(i = 0; i < N1; i++)
    for(j = 0; j < N2; j++)
        Average_W += W[i][j];
Average_W /= N1*N2;

// Computation of ||U(0) - U_bar||_2
for(i = 0; i < N1; i++)
    for(j = 0; j < N2; j++)
        norm = norm + (W[i][j]-LL[i][j])*(W[i][j]-LL[i][j]);
// norm = norm + (W[i][j]-Average_W)*(W[i][j]-Average_W);
norm = sqrt(norm);

while(steps < max_iter) {

// Inner points
for(i = 1; i <= N1-2; i++)
    for(j = 1; j <= N2-2; j++)
        Temp[i][j] = W[i][j] - T*C2[j]*(2*W[i][j] - W[i][j-1] - W[i][j+1])
        - T*C1[i]*(2*W[i][j] - W[i-1][j] - W[i+1][j]);

// North points
for(j = 1; j <= N2-2; j++)
```

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

```
Temp[0][j] = W[0][j] - T*C2[j]*(2*W[0][j] - W[0][j-1] -
W[0][j+1]) - T*C1[0]*(W[0][j] - W[1][j]);

// South points
for(j = 1; j <= N2-2; j++)
Temp[N1-1][j] = W[N1-1][j] - T*C2[j]*(2*W[N1-1][j] -
W[N1-1][j-1] - W[N1-1][j+1]) - T*C1[N1-1]*(W[N1-1][j] -
W[N1-2][j]);

// West points
for(i = 1; i <= N1-2; i++)
Temp[i][0] = W[i][0] - T*C2[0]*(W[i][0] - W[i][1])
T*C1[i]*(2*W[i][0] - W[i-1][0] - W[i+1][0]);

// East points
for(i = 1; i <= N1-2; i++)
Temp[i][N2-1] = W[i][N2-1] - T*C2[N2-1]*(W[i][N2-1] - W[i][N2-2])
- T*C1[i]*(2*W[i][N2-1] - W[i-1][N2-1] - W[i+1][N2-1]);

// Four corner points
Temp[0][0] = W[0][0] - T*C2[0]*(W[0][0] - W[0][1])
- T*C1[0]*(W[0][0] - W[1][0]);

Temp[0][N2-1] = W[0][N2-1] - T*C2[N2-1]*(W[0][N2-1] - W[0][N2-2])
- T*C1[0]*(W[0][N2-1] - W[1][N2-1]);

Temp[N1-1][0] = W[N1-1][0] - T*C2[0]*(W[N1-1][0] - W[N1-1][1])
- T*C1[N1-1]*(W[N1-1][0] - W[N1-2][0]);

Temp[N1-1][N2-1] = W[N1-1][N2-1] - T*C2[N2-1]*(W[N1-1][N2-1]
- W[N1-1][N2-2]) - T*C1[N1-1]*(W[N1-1][N2-1] - W[N1-2][N2-1]);

// Termination creterion
// if(Norma_2(W,N1,N2,Average_W)/norm < tol) break;
if(Norma_22(Temp,N1,N2,LL)/norm < tol) break;

// Copy Temp to W
for(i = 0; i < N1; i++)
for(j = 0; j < N2; j++)
W[i][j] = Temp[i][j];

// Increase the number of steps
```

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

```
steps++;  
}  
  
//Print_Matrix(W,N1,N2);  
  
return steps;  
}
```

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

## ΟΡΟΛΟΓΙΑ

Όρος	Περιγραφή	
<b>ΔΧ</b>	Διάχυση	15
<b>ΕΔΧ</b>	Επιταχυντική Διάχυση	16

## ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] J. E. Boillat. Load balancing and poisson equation in a graph. *Concurrency: Pract. Exper.*, 2(4):289–313, 1990.
- [2] A. Brandt. Multigrid adaptive solutions to boundary value problems. *MC*, 31:333–390, 1977.
- [3] G. Cybenko. Dynamic load balancing for distributed memory multiprocessors. *J. Parallel Distrib. Comput.*, 7(2):279–301, 1989.
- [4] R. Diekmann, A. Frommer, and B. Monien. Efficient schemes for nearest neighbor load balancing. *Parallel Comput.*, 25(7):789–812, 1999.
- [5] R. Elsässer, B. Monien, and R. Preis. Diffusive load balancing schemes on heterogeneous networks. In *SPAA '00: Proceedings of the twelfth annual ACM symposium on Parallel algorithms and architectures*, pages 30–38, New York, NY, USA, 2000. ACM.
- [6] Y. F. Hu and R. J. Blake. An improved diffusion algorithm for dynamic load balancing. *Parallel Comput.*, 25(4):417–444, 1999.
- [7] C.-C. Hui and S. T. Chanson. Theoretical analysis of the heterogeneous dynamic load-balancing problem using a hydrodynamic approach. *J. Parallel Distrib. Comput.*, 43(2):139–146, 1997.
- [8] C.-C. Hui and S. T. Chanson. Hydrodynamic load balancing. *IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst.*, 10(11):1118–1137, 1999.
- [9] G. Karagiorgos and N. M. Missirlis. Convergence of the diffusion method for weighted torus graphs using fourier analysis. *Theor. Comput. Sci.*, 401(1-3):1–16, 2008.
- [10] T. Rotaru and H.-H. Nägeli. Dynamic load balancing by diffusion in heterogeneous systems. *J. Parallel Distrib. Comput.*, 64(4):481–497, 2004.

Η μέθοδος της Διάχυσης για την εξισορρόπηση φορτίου σε δίκτυα τοπολογίας πλέγματος

- [11] T. Rotaru and H.-H. Nägeli. Fast algorithms for fair dynamic load redistribution in heterogeneous environments. *Appl. Numer. Math.*, 49(1):81–95, 2004.
- [12] J. Watts and S. Taylor. A practical approach to dynamic load balancing. *IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst.*, 9(3):235–248, 1998.
- [13] C. Xu and F. C. Lau. *Load Balancing in Parallel Computers: Theory and Practice*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA, 1997.
- [14] C.-Z. Xu and F. C. M. Lau. Optimal parameters for load balancing using the diffusion method in k-ary n-cube networks. *Inf. Process. Lett.*, 47(4):181–187, 1993.