Réseaux d'Automates Stochastiques (SANs) à temps discret

Anne Benoit. Laboratoire Informatique et Distribution. ENSIMAG - Antenne de Montbonnot. ZIRST
51, Avenue Jean Kuntzmann. 38330 Montbonnot St Martin. France.
Anne.Benoit@imag.fr
11 Avril 2003

Les chaînes de Markov facilitent l'analyse des performances des systèmes dynamiques dans de nombreux domaines d'application. Elles sont particulièrement bien adaptées à la prédiction de performances de systèmes parallèles et distribués. Elles sont souvent utilisées par le biais de modèles de haut niveau. Un logiciel est alors utilisé pour générer l'espace d'état et le générateur infinitésimal de la chaîne de Markov, ainsi que pour calculer les solutions stationnaires et transitoires.
Plusieurs formalismes de haut niveau ont été proposés pour permettre la modélisation de chaînes de Markov très grandes et très complexes de façon compacte et structurée. Par exemple, les réseaux d'automates stochastiques (SANs) [5, 2], les réseaux de file d'attente, les réseaux de Pétri stochastiques généralisés, les algèbres de processus sont largement utilisés dans divers domaines d'application, grâce à leur grand pouvoir de modélisation. Le système est alors représenté sous forme de sous-systèmes indépendants qui interagissent entre eux.
La plupart de la recherche sur les approches structurées pour l'évaluation des performances ont supposé une échelle de temps continu. Moins d'attention a été portée sur les systèmes à temps discret. Ces derniers sont en effet plus difficiles à modéliser, car plusieurs événements peuvent avoir lieu pendant une même unité de temps (événements concurrents). Ceci n'arrive jamais en temps continu, et les principaux résultats dans ce domaine de recherche ne s'étendent pas pour les modèles à temps discret.
Nous présentons tout d'abord plus en détail le problème lié aux événements concurrents, ainsi que différentes modélisations possibles que l'on trouve dans la littérature. Ensuite, nous exposons à travers un exemple un nouveau formalisme de réseaux d'automates stochastiques (SANs) à temps discret. Enfin, nous évoquons les perspectives ouvertes par ces travaux.

1. Evénements concurrents

Pour expliquer le problème, on se place dans le cadre des réseaux de Pétri stochastiques. Lorsqu'on considère un modèle en temps discret, il se peut que plusieurs transitions soient candidates au même instant, comme par exemple les transitions $t1$ et $t2$ dans la figure 1a. Les transitions sont dites *concurrentes*. Il faut alors choisir quelle transition effectuer. On associe l'événement e à la transition $t1$ et l'événement f à la transition $t2$. La probabilité d'occurrence de e est p, celle de f est q.
On trouve plusieurs sémantiques différentes pour traiter le problème dans la littérature des réseaux de Pétri. Dans les premiers travaux de Molloy [4] sur les réseaux de Pétri stochastiques à temps discret, les deux événements concurrents e et f ne peuvent pas avoir lieu en même temps. Dans le graphe de marquage du réseau de Pétri (figure 1b), on divise les probabilités par $(1-pq)$ pour avoir une somme des probabilités égale à 1. Ainsi, si aucun événement a lieu (probabilité $(1-p)(1-q)$), on reste dans le même état, sinon le jeton va dans la place $p2$ ou $p3$.
Dans l'approche de Ciardo [1], on assigne un poids à chaque événement : $w1$ et $w2$. Les probabilités ne sont alors plus divisées comme pour [4], mais on considère que les deux événements peuvent se déclencher simultanément (probabilité pq), et la place du jeton dépend alors des poids (probabilité $w1/(w1+w2)$ que l'événement e ait effectivement lieu). La figure 1c illustre cette sémantique.
Il existe encore bien d'autres approches possibles. Nous présentons maintenant un formalisme de SANs à temps discret, qui vise à régler les conflits différemment. On souhaite en effet autoriser plusieurs événements dans une même unité de temps, comme cela peut être le cas dans un modèle à temps discret.

2. Formalisme des SANs à temps discret

Nous présentons ici le formalisme des SANs à temps discret à travers un exemple de réseau de files d'attente. On considère une file de capacité finie 2. Elle peut être modélisée par un automate à 3 états, et l'état x_i ($i \in [0..2]$) signifie qu'il y a i clients dans la file. Dans ce modèle, deux événements peuvent se produire, une arrivée de clients (événement a) ou un départ (événement d). En temps discret, on peut avoir au même instant une arrivée et un départ. Pour cela, on doit définir l'ordre dans lequel les arrivées et le service des clients a lieu [3]. On se place dans le cadre d'arrivées tardives, à savoir les départs ont lieu au début de l'intervalle de

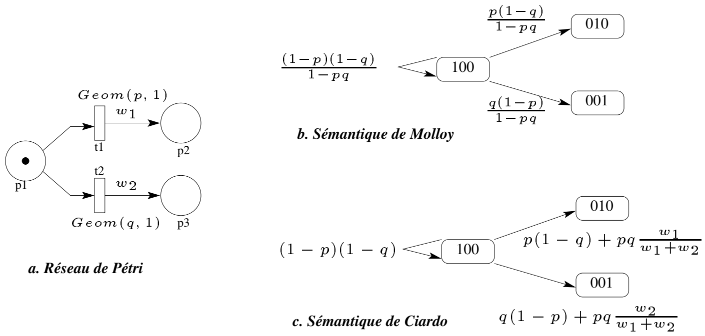

FIG. 1 – Différentes sémantiques pour traiter les événements concurrents

temps, et les arrivées à la fin. On donne alors des priorités aux événements, et dans notre cas les départs sont plus prioritaires que les arrivées.
La figure 2 présente un automate stochastique qui modélise ce système de file d'attente. Les transitions sont étiquetées par les événements. Lors de l'occurrence d'un événement, le système change d'état. Il existe une transition étiquetée par l'événement a qui va vers un état "vide" $\emptyset$. Ceci permet d'autoriser simultanément un départ puis une arrivée (les départs sont plus prioritaires) lorsque le système est dans l'état x_2. En revanche, il ne peut pas y avoir uniquement une arrivée lorsqu'on est dans cet état. Depuis l'état x_1, on peut avoir à chaque intervalle de temps un départ et une arrivée simultanés, uniquement un départ, uniquement une arrivée, ou bien aucun événement. Les probabilités de chacun de ces cas sont connues en fonction des probabilités des événements correspondants, et on peut construire la chaîne de Markov à temps discret qui représente ce système.

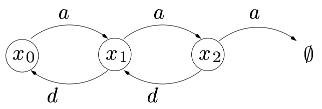

FIG. 2 – Exemple de SAN à temps discret

3. Perspectives

Nous avons ici présenté succinctement une des principales caractéristiques du nouveau formalisme de SANs à temps discret que nous proposons. La sémantique en cas de conflit est basée sur des priorités, et on autorise l'occurrence de plusieurs événements dans une même unité de temps. Ces notions, présentées sur un seul automate stochastique, sont bien évidemment étendues à des réseaux d'automates stochastiques, et on peut ainsi générer la chaîne de Markov équivalente à partir du SAN.
Il reste cependant un gros travail à effectuer au niveau des méthodes et algorithmes sur ce formalisme de SANs à temps discret. En effet, il faudrait trouver une expression tensorielle qui tienne compte des priorités, pour pouvoir y appliquer des méthodes de résolution sans générer la chaîne de Markov. On espère ainsi pouvoir exploiter la structure des réseaux d'automates stochastiques de la même façon que les travaux effectués sur les modèles à temps continu.

Références

[1] G. Ciardo, R. German, and C. Lindemann. A Characterization of the Stochastic Process Underlying a Stochastic Petri Net. *IEEE Transactions on Software Engineering*, 20(7) :506–515, Jul 1994.
[2] P. Fernandes. *Méthodes Numériques pour la solution de systèmes Markoviens à grand espace d'états.* PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, France, 1998.
[3] E. Gelenbe and G. Pujolle. *Introduction to Queueing Networks, second edition.* John Wiley & Sons, 1998.
[4] M.K. Molloy. Discrete Time Stochastic Petri Nets. *IEEE Transactions on Software Engineering*, 11(4) :417–423, Apr 1985.
[5] B. Plateau. *De l'Evaluation du parallélisme et de la synchronisation.* PhD thesis, Université de Paris XII, Orsay (France), 1984.