Programmation Effective – TD 07 : Histoires de chocolats

matthieu.gallet@ens-lyon.fr

mardi 25 mars 2008

1 Rappels de combinatoire

1.1 Permutations (sans répétition) d'objets discernables

Une disposition des objets d'un ensemble E de cardinal n, dans n cases avec un et un seul objet par case, ou un ordonnancement des éléments de E se représente par une bijection de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans E ou une permutation de E. Il est commode de représenter une telle bijection par un n-uplet (ou n-liste) d'éléments de E, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Il y a $n!$ permutations (sans répétition) de n éléments.

1.2 Permutations avec répétition d'objets discernables

Pour déterminer le nombre des dispositions possibles d'objets de plusieurs classes et mutuellement indiscernables dans chaque classe, il est utile de considérer le nombre de dispositions possibles de ces objets en les supposant tous discernables, et ensuite de trouver combien de ces dispositions sont indiscernables. Le nombre des dispositions possibles de ces objets est égal au nombre de dispositions possibles des objets considérés comme discernables divisé par le nombre des dispositions indiscernables. Par exemple, si nous devons déterminer le nombre total de dispositions d'objets dont deux sont d'une première classe, trois d'une deuxième classe et cinq d'une troisième classe, alors nous calculons le nombre total de dispositions de ces objets considérés comme discernables, ce qui donne $(2+3+5)!$, soit 3628800 dispositions possibles. Mais certaines dispositions restent inchangées lorsque les objets indiscernables d'une même classe sont échangés mutuellement, et il y a $2! \times 3! \times 5!$ soit 1440 façons de permuter les objets de chacune de ces classes. Nous obtenons au total $3628800/1440 = 2520$ dispositions différentes. Il s'agit aussi du nombre de permutations avec répétition de 10 éléments avec 2, 3 et 5 répétitions. Généralisation Le nombre de permutations de n éléments, répartis dans k classes dont n_1 sont de classe 1, n_2 sont de classe 2, …, n_k sont de classe k, indiscernables dans chaque classe, ou le nombre de permutations de n éléments avec n_1, n_2, …, n_k répétitions, avec $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, est égal à : $\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.

1.3 Arrangements (choix en tenant compte de l'ordre)

Arrangements sans répétition Nous disposons de n objets discernables et nous voulons en placer k, en tenant compte de l'ordre, dans k cases numérotées de 1 à k avec un et un seul objet par case. Le nombre de dispositions est alors égal au nombre de k-listes distinctes formées à partir de ces objets. Au lieu de constituer un n-uplet, à partir de n objets discernables, nous formons ici des k-uplets avec $k \leq n$ $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ à partir de ces n objets tels que pour $i \neq j$, on ait $x_i \neq j$. Un tel k-uplet s'appelle un arrangement sans répétition de n éléments pris k à k.

Le nombre d'arrangements sans répétition de n éléments pris k à k est égal à A_n^k (égal à $\frac{n!}{(n-k)!}$ si $k \leq n$ et à 0 sinon). En effet, Il y a n choix possibles de l'objet qui occupe la première place du k-uplet, $n-1$ choix pour l'objet de la 2e place ; pour la ke, il ne reste plus que $n-(k-1)$ objets et donc $n-k+1$ choix possibles. Le produit $n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)$ s'écrit bien sous la forme : $\frac{n!}{(n-k)!}$. Le cas $n = k$ nous oblige alors à diviser par $(0)!$ que l'on définit comme valant 1.

Arrangements avec répétition Lorsque nous voulons placer des objets pris parmi n objets discernables dans k emplacements en tenant compte de l'ordre, ces objets pouvant apparaître plusieurs fois, le nombre de dispositions est alors égal au nombre de k-uplets formés à partir de ces n objets. Un tel k-uplet, avec $k \leq n$, $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ formé à partir de ces n objets s'appelle un arrangement avec répétition de n éléments pris k à k. Comme chaque emplacement peut être occupé indifféremment par l'un quelconque de ces n objets, il y en a au total n^k. Quand nous tirons 11 fois l'un de 3 numéros en tenant compte de l'ordre d'apparition nous obtenons au total $3^{11} = 177147$ tirages différents.

1.4 Combinaisons (choix sans tenir compte de l'ordre)

Contrairement aux arrangements, les combinaisons sont des dispositions d'objets qui ne tiennent pas compte de l'ordre de placement de ces objets. Par exemple, si a, b et c sont des boules tirées d'une urne, abc et acb correspondent au même tirage. Il y a donc moins de combinaisons que d'arrangements.

Combinaisons sans répétition Si nous tirons sans remise k objets parmi n objets discernables, et nous les disposons sans tenir compte de l'ordre d'apparition, nous pouvons représenter ces k objets par une partie à k éléments d'un ensemble à n éléments. Ce sont des combinaisons sans répétition de n éléments pris k à k. Pour déterminer le nombre de ces dispositions, nous pouvons déterminer le nombre d'arrangements de k objets et diviser par le nombre de dispositions obtenues les unes à partir des autres par une permutation. Il y a donc $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ dispositions.

Combinaisons avec répétition Si nous tirons avec remise k objets parmi n objets discernables, et nous les disposons sans tenir compte de l'ordre d'apparition ; ces objets peuvent apparaître plusieurs fois et nous ne pouvons les représenter ni avec une partie à k éléments, ni avec un k-uplet puisque leur ordre de placement n'intervient pas. Il est cependant possible de représenter de telles dispositions avec des applications appelées combinaisons avec répétition. Le nombre de combinaisons avec répétition de n éléments pris k à k est égal à : $\Gamma_n^k = \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix}$. Donnons l'exemple du jeu de domino. Les pièces sont fabriquées en disposant côte à côte deux éléments de l'ensemble $\{\text{blanc}, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si nous retournons un domino, nous changeons l'ordre des deux éléments, mais le domino reste identique. Nous avons une combinaison avec répétition de 7 éléments pris 2 à 2, et au total il y a $\Gamma_7^2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 28$ dominos dans un jeu.

2 Applications

Résolvez les problèmes suivants : `http://acm.uva.es/p/v106/10648.html`, `http://acm.uva.es/p/v104/10489.html`,`http://acm.uva.es/p/v108/10857.html`,`http://acm.uva.es/p/v105/10590.html`, `http://acm.uva.es/p/v101/10136.html`.