

Programmation Effective – TD 10 : Exercices de géométrie

matthieu.gallet@ens-lyon.fr

mardi 22 avril 2008

1 Calcul d'aires

1.1 Le théorème de Pick

Au royaume de Far Far Away, il était une fois une princesse nommée Lucie, qui, jalouse de sa sœur Fiona, voulait avoir un château à la fois plus grand et plus original. En effet, les châteaux traditionnels ne lui convenaient plus et elle voulait une forme polygonale simple (un polygone non croisé) autre qu'un simple carré. Rapidement, les architectes lui présentèrent un premier projet, qui ressemblait plus ou moins à la Figure 1. Cependant, la princesse n'était pas convaincue d'avoir suffisamment de surface (oui, une princesse, c'est exigeant) et voulu vérifier par elle-même en la recalculant. Comme elle n'était pas [complètement] sottre, elle connaissait bien évidemment le théorème de Pick, qui s'énonce ainsi :

Théorème 1. *Considérons un polygone simple de coordonnées entières. Alors, si i désigne le nombre de points à l'intérieur du polygone et b le nombre de points situés sur la frontière, alors l'aire du polygone est donnée par $A = i + \frac{b}{2} - 1$.*

1.2 Sans connaître les points à l'intérieur

Rapidement, elle se rendit compte que compter les points intérieurs serait fastidieux, et elle appliqua donc une autre technique classique. Numérotant les sommets du château par S_0, S_1, \dots , jusqu'à S_n (n grand, ce n'est pas un petit château !), elle prit un point P quelconque sur le plan et calcula simplement la somme de des aires signées de tous les triangles PV_iV_{i+1} , comme montré sur la figure 2.

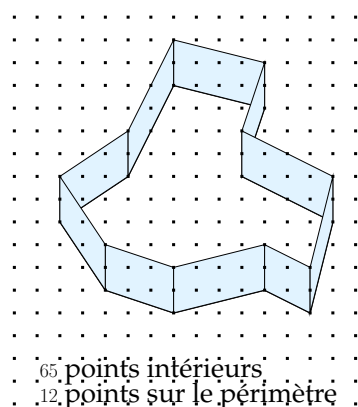


FIG. 1 – plan simplifié du château

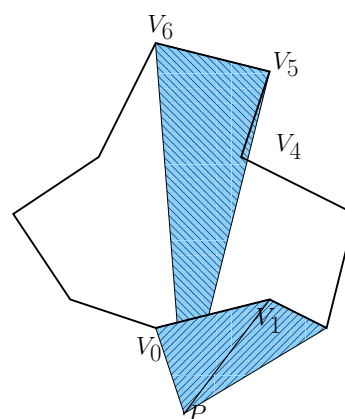


FIG. 2 – calcul de l'air

2 Calcul d'enveloppes convexes

Cette princesse, décidée à embêter ses architectes, voulut après avoir fait construire son château un parc rempli de n arbres rares. Pour les protéger des braconniers, il fallait donc impérativement les protéger par un enclos. Comme dans ce royaume les enclos coûtent cher, les architectes furent chargés de calculer le plus petit possible, ayant à leur disposition les coordonnées (GPS, soyons modernes !) de chaque arbre. N'étant pas sots non plus, ils se tournèrent vers des algorithmes de calcul d'enveloppes convexes. La princesse ayant beaucoup d'arbres, un algorithme naïf en $\mathcal{O}(n^4)$ était irréalisable. Heureusement, ils avaient suivi leur cours de Programmation Effective et connaissaient un algorithme pour construire les enveloppe convexes en temps $\mathcal{O}(n \log n)$, avec l'algorithme de chaînes monotones d'Andrew.

L'algorithme demande de trier les points dans l'ordre lexicographique des coordonnées (x, y) , et va parcourir cette liste pour construire la partie supérieure de la coque de droite à gauche, l'idée étant simplement que si les 3 derniers points ne sont pas dans le sens horaires, alors le point du milieu est strictement à l'intérieur du polygone. De la même façon, l'algorithme va construire la partie inférieure de la coque. Un pseudo-code complet est donné par l'Algorithme 1.

Algorithm 1 Andrew()

ENTRÉES: P liste de points du plan \mathcal{P}

Trier les points de P par leurs abscisses x (et par leur ordonnée y en cas d'égalité).

Supprimer les points de même coordonnées

$U \leftarrow NIL$ (partie haute de la coque)

$L \leftarrow NIL$ (partie basse de la coque)

pour $i \leftarrow 1 \dots n$ **faire**

tantque L contient au moins 2 points et la suite des deux derniers points de L et $P[i]$ ne sont pas dans le sens horaire **faire**

 supprimer le dernier point de L

fin tantque

$L \leftarrow L \cup P[i]$

fin pour

pour $i = n \dots 1$ **faire**

tantque U contient au moins 2 points et la suite des deux derniers points de U et $P[i]$ ne sont pas dans le sens anti-horaire **faire**

 supprimer le dernier point de L

fin tantque

$U \leftarrow U \cup P[i]$

fin pour

supprimer le premier point de U

supprimer le dernier point de L

renvoyer $L \cup U$

3 Applications

Résolvez tout de même les problèmes suivants :

- Moth Eradication (<http://online-judge.uva.es/p/v2/218.html>),
- Polygon Inside A Circle (<http://acm.uva.es/p/v104/10432.html>),
- Ancient Village Sports (<http://acm.uva.es/p/v104/10451.html>),
- Center of Masses (<http://acm.uva.es/p/v100/10002.html>),
- Useless Tile Packers (<http://acm.uva.es/p/v100/10065.html>),
- The Art Gallery (<http://acm.uva.es/p/v100/10078.html>),
- Rose Windows (<http://acm.uva.es/p/v107/10772.html>).