Arithmétique des ordinateurs – TD 02 : Systèmes de représentation

{ christoph.lauter, matthieu.gallet } @ens-lyon.fr

11 et 13 février 2008

1 Codage simple à position

1. Rappelez les avantages et les inconvénients de ce codage.

2 Complément à la base

Nous allons utiliser les bases décimales et binaires. En décimal nous utiliserons systématiquement 4 chiffres, et en binaire nous utiliserons 8 bits, soit 1 octet.

2. Écrivez les nombres suivants en base 2 : -42, -120, -2. Quelle différence avec le complément à 1 ? Écrivez les nombres suivants en base 10 : -42, -890.

Quelques opérations utilisant le complément à la base en binaire.

3. Calculez $31 - 42$, $69 - 42$, 13×-5.

3 Codages d'Avizienis

Le Muller rose utilise pour les systèmes d'Avizienis la notation $S_{\beta,\omega,q,n}$. Il s'agit du système d'écriture des nombres en base β avec n chiffres pris dans l'ensemble $\{\omega, \omega+1, \ldots, \omega+q\}$, où $n, q \in \mathbb{N}^{+}$ et $\omega \in \mathbb{Z}$.

4. Écrivez les nombres $-42, 813, 1927$ dans le système $S_{10,-6,12,4}$.

5. Montrez le théorème suivant :

> **Theorème 1** *Soit $G_{\beta,\omega,q,n}$ l'ensemble des nombres que l'on peut écrire avec le système $S_{\beta,\omega,q,n}$. Si $q < \beta - 1$, alors les éléments $G_{\beta,\omega,q,n}$ ne sont pas consécutifs : entre deux éléments de $G_{\beta,\omega,q,n}$, il peut y avoir un entier n'appartenant pas à $G_{\beta,\omega,q,n}$.*

Cela signifie que ce système dispose de trop peu de chiffres pour représenter tous les nombres. Évidemment, l'intérêt d'un tel système est plus que douteuse... Cependant, si on ajoute davantage de chiffres, alors tous les entiers sont représentables, et parfois plus d'une fois.

6. Montrez le théorème suivant :

> **Theorème 2** *Si $q > \beta - 1$, alors $G_{\beta,\omega,q,n}$ est égal à l'ensemble des entiers compris entre $\omega\frac{\beta^n-1}{\beta-1}$ et $(\omega+q)\frac{\beta^n-1}{\beta-1}$, et l'écriture d'un entier dans ce système n'est pas forcément unique : c'est un système redondant.*

Pour être plus facilement utilisable, on demande généralement à un système d'Avizienis d'être symétrique, c'est-à-dire que l'ensemble des chiffres utilisées est de la forme $\{-\alpha, -\alpha+1, \ldots, 0, 1, \ldots, \alpha-1, \alpha\}$, et d'être comparable, c'est-à-dire que l'on peut facilement déterminer le signe du nombre. On peut montrer que tout nombre écrit dans ce système a le signe de son premier chiffre non nul si, et seulement si, $\alpha \leq \beta - 1$.

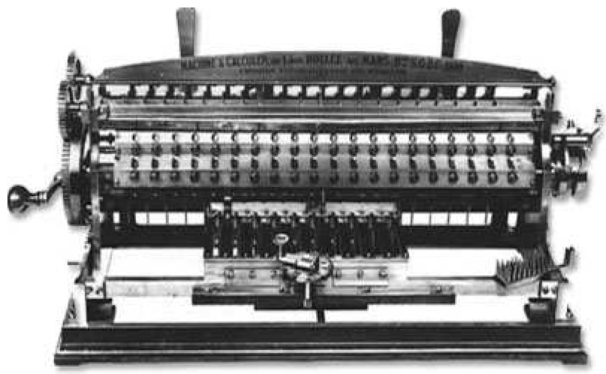
7. Rappelez l'algorithme pour calculer une addition en utilisant un système d'Avizienis symétrique vérifiant $\alpha \leq \beta - 1$.

8. Montrez que la condition $2\alpha \geq \beta + 1$ est suffisante pour que cet algorithme fonctionne.

9. Formez une rangée de 8 personnes au tableau. Dans le système $S_{10,-6,12,8}$, convertissez puis additionnez 52671772 et 12535497.

4 Additionneurs mécaniques et multiplication

Les additionneurs mécaniques sont les précurseurs des calculatrices modernes. On lui donne deux nombres a et b, et l'additionneur d'un coup de manivelle va pouvoir calculer $a + b$. Si on donne p tours de manivelle, le résultat de l'opération correspondra à $a + p * b$ (c'est donc un FMA avant l'heure !). Si on tourne la manivelle p fois dans le sens inverse, l'opération sera alors $a - p * b$. De plus, on sait également multiplier par 10 en une opération.



10. Malheureusement, les comptables ne sont pas forcément des sportifs, et ils cherchent donc à minimiser le nombre de tours de manivelle à donner pour faire leurs calculs. Par exemple, au lieu de donner 8 tours pour multiplier b par 8, il est plus intéressant de calculer $10 \times b$ puis de soustraire $2 \times b$.

Aidez-les à trouver la meilleur méthode pour calculer une multiplication en utilisant le plus petit nombre possible de tours de manivelle !

5 Codages modulaires

11. Rappelez le théorème des restes chinois.

Pour finir cette partie, un peu de pratique ! On considère les *moduli* 2, 3, 5, 7 et 11. Ils sont premiers donc premiers deux à deux.

12. Quels sont les nombres représentables avec des *moduli*, en supposant une origine à 0 ?

13. Dans ce système de *moduli*, effectuez les opérations suivantes :
- $53 - 42$
- $42 + 511$
- $42 * 53$
- plus dur : $304/19$