Arithmétique des ordinateurs – TD 05 : Diviseurs

{ christoph.lauter, matthieu.gallet } @ens-lyon.fr

7 avril 2008

Durant cette séance, nous allons nous intéresser uniquement à la méthode additive de la division, par récurrence de chiffres. On rappelle que l'on veut diviser X par D, donc que l'on cherche Q et R tels que $X = Q.D + R$, vérifiant $|R| < D.\mathrm{ulp}(Q)$ et R de même signe que X.

1 Algorithme naturel

1. Appliquez l'algorithme à la main avec $n = 2$, de $X = 1221395$ par $D = 1973$ (en décimal bien évidemment).

2. Maintenant, posez la division restaurante binaire, avec $n = 4$, de $X = 159$ par $D = 13$.

3. Quels sont les avantages et inconvénients d'une base β plus grande que 2 ?

4. Rappelez l'algorithme de la division non-restaurante. Appliquez-le à $X = 136$ et $D = 11$.

2 La division additive, en flottant

Comme nous sommes en flottant, on écrit tous les nombres sous la forme $(-1)^s.M.2^e$, où M est la mantisse entière.

5. Rappelez pourquoi le signe et l'exposant ne posent aucun problème lors d'une division.

On peut donc supposer que l'on a
- $\frac{1}{2} \leq X < 1$
- $\frac{1}{2} \leq D < 1$
- $\frac{1}{2} < Q < 2$

On écrit X et D en base β (une petite puissance de 2), et on cherche à calculer Q, toujours en base β mais avec un ensemble de chiffres redondants $\{-\alpha, \ldots, \alpha\}$ avec $\alpha \geq \lceil \frac{\beta}{2} \rceil$.

6. Rappelez la valeur de l'erreur ε_j commise après la $j$ème itération de la division.

7. Rappelez l'algorithme général de division additive, sans préciser la fonction de sélection.

On veut assurer la convergence de l'algorithme. Pour cela, on veut qu'à chaque étape j de l'algorithme, si on a $\underline{B} \leq R_j \leq \overline{B}$, alors on a $\underline{B} \leq R_{j+1} \leq \overline{B}$.

8. Redémontrez que l'on a $\underline{B} = -\frac{\alpha}{\beta-1}D$ et $\overline{B} = \frac{\alpha}{\beta-1}D$.

3 Fonction de sélection

La fonction de sélection est la fonction de $\mathrm{SEL}(R_j, D)$ qui va déterminer q_{j+1}.

9. Dessinez le diagramme de Robertson et le diagramme P-D pour $\beta = 4$ et $\alpha = 2$. Quel est l'intérêt du *prescaling* ?

Maintenant, nous voulons utiliser le principal intérêt de la notation redondante, c'est-à-dire déterminer k sans utiliser l'intégralité des bits de D. Pour d'évidentes raisons de simplicité, on va prendre comme fonction de sélection une fonction indépendante de D.

10. Déterminez δ, le nombre minimal de bits de D que l'on doit consulter dans notre fonction $\mathrm{SEL}(R_{j+1}, D)$ pour être sûr du résultat. Pourquoi prendre $\delta = 4$?

4 Implémentation pratique

11. Proposez une implémentation pratique d'un diviseur. Quels sont les principaux choix à faire ? Soyez modernes, et prenez le cas de la nouvelle architecture Penryn d'Intel, qui utilise la base 16.

12. Le quotient est calculé en utilisant une notation redondante, avec des nombres négatifs. Il faut donc le transformer pour qu'il soit utilisable. Une idée simple serait de faire la conversion au moins d'une simple soustraction. Cependant cette idée est en temps linéaire en le nombre de bits, donc trop lente. Ercegovac et Lang propose une conversion à la volée, sauriez-vous la retrouver ?

5 Racine carrée

Pendant le cours, on vous a dit que division et racine carrée, c'était moralement la même chose. On considère X tel que $\frac{1}{4} \leq X \leq 1$, et on veut calculer $S = \sqrt{X}$. On notera s_i les différents chiffres de S et $S[j] = \sum_{i=0}^{j} s_i \beta^{-i}$. On définit un reste partiel w tel que $w[j] = \beta^j (X - S[j]^2)$ et on peut montrer que l'on a $-2\rho S[j] + \rho^2 \beta^{-j} < w[j] < 2\rho S[j] + \rho^2 r^{-j}$, sachant que $w[0] = x - S[0]^2 = x - s_0$.

13. donnez une relation pour $w[j+1]$ en fonction de $w[j]$, $S[j]$ et s_{j+1}.

On suppose que l'on a une fonction de sélection $\mathrm{SEL}_{\mathrm{SQR}}(w[j], S[j])$ qui donne le s_{j+1} correct.

14. donnez un algorithme pour calculer la racine carrée d'un nombre X entre $\frac{1}{4}$ et 1.