# Cours d'Algorithmique

**Rédaction**
Etudiants-scribes, MIM 2003 et 2004

**Cours**
Yves Robert
**Travaux Dirigés**
Yves Caniou et Eric Thierry

2003-2004-2005

# Table des matières

# Chapitre 1

# Introduction : calcul de $x^n$

## 1.1 Énoncé du problème

On étudie le problème du calcul de $x^n$, étant donnés $x$ et $n$ (n étant un entier positif). Soulignons que $x$ n'est pas nécessairement un nombre, il peut s'agir d'une matrice ou d'un polynôme à plusieurs indéterminées : si la multiplication a un sens, la division n'en a pas !

On pose $y_0 = x$, et on utilise la "règle du jeu" suivante : si j'ai déjà calculé $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}$, je peux calculer $y_i$ comme produit de deux résultats précédents arbitraires :

$$y_i = y_j \cdot y_k, \text{ avec } 0 \leq j, k \leq i-1$$

Le but est d'atteindre $x^n$ le plus vite possible, i.e. de trouver

$$Opt(n) = \min\{i / y_i = x^n\}.$$

## 1.2 Algorithme naïf

Considérons l'algorithme *naïf* suivant :

$$y_i = y_0 \cdot y_{i-1}$$

On a $y_{n-1} = x^n$, le coût est donc de $n-1$.

## 1.3 Méthode binaire

On trouve facilement un algorithme plus efficace :

$$x^n = \begin{cases} x^{n/2} \cdot x^{n/2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ x^{\lceil n/2 \rceil} \cdot x^{\lceil n/2 \rceil} \cdot x & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On peut aussi formuler l'algorithme de la façon suivante. On écrit $n$ en écriture binaire. Puis on remplace chaque "1" par SX et chaque "0" par S, et on enlève le premier SX (celui qui est à gauche). Le mot obtenu donne un façon de calculer $x^n$, en traduisant S par l'opération *mettre au carré* (squaring), et X par l'opération *multiplier par $x$*. Par exemple, pour $n = 23$, la chaîne obtenue est SX S SX SX SX, en enlevant le premier SX, on obtient SSXSXSX. On calcule donc dans l'ordre $x^2$, $x^4$, $x^5$, $x^{10}$, $x^{11}$, $x^{22}$, et $x^{23}$.

La correction de l'algorithme se justifie facilement à partir des propriétés du système binaire. Le coût est de :

$$\lfloor \log n \rfloor + \nu(n) - 1,$$

où $\nu(n)$ représente le nombre de 1 dans l'écriture binaire de $n$. Bien sûr, comme dans tout ouvrage d'informatique qui se respecte, les logarithmes sont en base 2.

Cette méthode binaire n'est pas optimale : par exemple avec $n = 15$, on obtient la chaîne SXSXSX, d'où 6 multiplication alors que en remarquant que $15 = 3 \cdot 5$, on a besoin de 2 multiplications pour trouver $y = x^3$ ($y = (x \cdot x) \cdot x$) puis de 3 autres pour calculer $x^{15} = y^5$ (on applique la méthode binaire : $y^2, y^4, y^5$).

## 1.4 Méthode des facteurs

La méthode des facteurs est basée sur la factorisation de $n$ :

$$x^n = \begin{cases} (x^p)^q & \text{si } p \text{ est le plus petit facteur premier de } n, \\ x^{n-1} \cdot x & \text{si} n \text{ est premier.} \end{cases}$$

**Remarque :** Avec les puissances de 2, cette méthode est identique à la méthode binaire.

**Remarque :** Cette méthode n'est pas optimale, par exemple pour $n = 33$ on a 7 multiplications avec la méthode des facteurs et seulement 6 avec la méthode binaire.

**Remarque :** Il existe une infinité de nombres pour lesquels la méthode des facteurs est meilleure que la méthode binaire (prendre $n = 15 \cdot 2^k$), et réciproquement (prendre $n = 33 \cdot 2^k$).

Il faut souligner que le coût de la recherche de la décomposition de $n$ en facteurs premiers n'est pas pris en compte dans notre formulation. C'est pourtant nécessaire pour quantifier correctement le coût de la méthode des facteurs. Le problème est qu'on ne sait pas, à ce jour, trouver la décomposition en temps polynomial en $n$.

## 1.5 Arbre de Knuth

Une autre méthode consiste à utiliser *l'arbre de Knuth*, représenté Figure 1.1. Le chemin menant de la racine de l'arbre à $n$ indique une séquence d'exposants permettant de calculer $x^n$ de façon efficace.

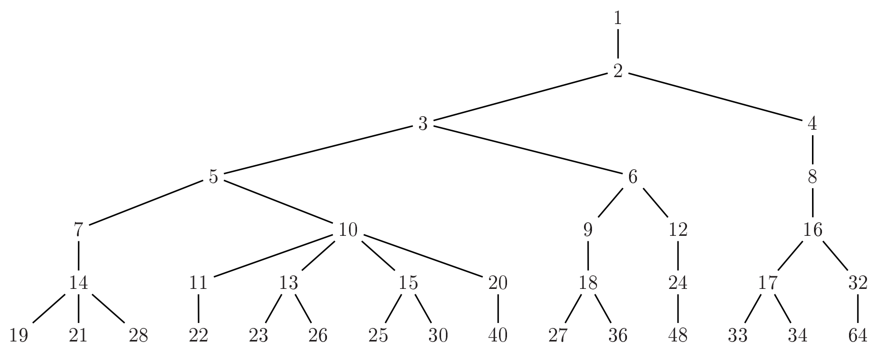



Fig. 1.1 – Les sept premiers niveaux de l'arbre de Knuth.

**Construction de l'arbre** Le $(k+1)$-ème niveau de l'arbre est défini à partir des $k$ premiers niveaux de la façon suivante : prendre chaque nœud $n$ du $k$-ème niveau, de gauche à droite, et les relier avec les nœuds

$$n+1, n+a_1, n+a_2, \ldots, n+a_{k-1} = 2n$$

(dans cet ordre), où $1, a_1, \ldots, a_{k-1} = n$ représente le chemin de la racine à $n$. On n'ajoutera pas un nœud si celui ci est déjà présent dans l'arbre.

Voici quelques statistiques dues à Knuth : les plus petits nombres pour lesquels la méthode n'est pas optimale sont $n = 77, 154, 233$. Le plus petit $n$ pour lequel la méthode de l'arbre est supérieure à la fois à la méthode binaire et à celle des facteurs est $n = 23$. Le plus petit $n$ pour lequel la méthode de l'arbre est moins bonne que celle des facteurs est $n = 19879 = 103 \cdot 193$ ; de tels cas sont rares : pour $n \leq 100000$, l'arbre bat les facteurs 88803 fois, fait match nul 11191 fois et perd seulement 6 fois.

## 1.6 Résultats sur la complexité

**Théorème 1.** $Opt(n) \geq \lceil \log n \rceil$

**Preuve**. Soit un algorithme permettant de calculer les puissances de $x$, avec pour tout $i$, $y_i = x^{\alpha(i)}$. Montrons par récurrence que $\alpha(i) \leq 2^i$. Pour la base, on a bien $y_0 = x$ d'où $1 \leq 2^0 = 1$. Soit $i$ un entier, il existe $j$ et $k$ $(j, k < k)$ tels que $y_i = y_j \cdot y_k$. On a $\alpha(i) = \alpha(j) + \alpha(k)$, par l'hypothèse d'induction, $\alpha(j) \leq 2^j \leq 2^{i-1}$ et de même $\alpha(k) \leq 2^{i-1}$. On en déduit donc que $\alpha(i) \leq 2^{i-1} + 2^{i-1} = 2^i$.

Intuitivement, la preuve exprime qu'on ne peut pas faire mieux que doubler l'exposant obtenu à chaque étape de l'algorithme. □

Grâce au théorème précédent, et à l'étude de la méthode binaire, dont le nombre d'étapes est inférieur à $2 \log n$, on a le résultat suivant :

$$1 \leq \lim_{n \to \infty} \frac{Opt(n)}{\log n} \leq 2.$$

**Théorème 2.** $\lim_{n \to \infty} \frac{Opt(n)}{\log n} = 1$

**Preuve**. L'idée est d'améliorer la méthode binaire en appliquant cette méthode en base $m$. Posons $m = 2^k$, où $k$ sera déterminé plus tard, et écrivons $n$ en base $m$ :

$$n = \alpha_0 m^t + \alpha_1 m^{t-1} + \cdots + \alpha_t,$$

où chaque $\alpha_i$ est un "chiffre" en base $m$, donc compris entre 0 et $m-1$. Puis on calcule tous les $x^d$, $1 \leq d \leq m-1$) par la méthode naïve, ce qui requiert $m-2$ multiplications. En fait, on n'a pas forcément besoin de toutes ces valeurs, seulement des $x^{\alpha_i}$, mais comme on les calcule "au vol" on peut les calculer tous sans surcoût.

Ensuite on calcule successivement :

$$\begin{array}{rcl}
y_1 & = & (x^{\alpha_0})^m \cdot x^{\alpha_1} \\
y_2 & = & (y_1)^m \cdot x^{\alpha_2} = x^{(\alpha_0 m + \alpha_1)m + \alpha_2} \\
\vdots & & \\
y_t & = & (y_{t-1})^m \cdot x^{\alpha_t} = x^n
\end{array}$$

On effectue pour chaque ligne $k+1$ opérations ($k$ élévations au carré pour calculer la puissance $m$-ème, et une multiplication), d'où le coût total du calcul de $x^n$ :

$$t \cdot (k+1) + (m-2).$$

En remplaçant $m$ par $2^k$, et $t$ par $\lfloor \log_m n \rfloor$, on trouve un coût total de

$$\lfloor \log_m n \rfloor (k+1) + 2^k - 2 \leq \frac{\log_2 n}{k}(k+1) + 2^k.$$

Il suffit donc de prendre $k$ tendant vers l'infini, pour que $(k+1)/k$ tende vers 1, et tel que $2^k = o(\log n)$, par exemple $k = \lfloor 1/2 \log(\log n) \rfloor$ (on aura alors $2^k \leq \sqrt{\log n}$). $\square$

## 1.7 Exercices

**Exercice 1.7.1.** *Le grand saut*

Le problème est de déterminer à partir de quel étage d'un immeuble, sauter par une fenêtre est fatal. Vous êtes dans un immeuble à $n$ étages (numérotés de 1 à $n$) et vous disposez de $k$ étudiants. Il n'y a qu'une opération possible pour tester si la hauteur d'un étage est fatale : faire sauter un étudiant par la fenêtre. S'il survit, vous pouvez le réutiliser ensuite, sinon vous ne pouvez plus.

Vous devez proposer un algorithme pour trouver la hauteur à partir de laquelle un saut est fatal (renvoyer $n+1$ si on survit encore en sautant du $n$-ème étage) en faisant le minimum de sauts.

1 - Si $k \geq \lceil \log_2(n) \rceil$, proposer un algorithme en $\mathcal{O}(\log_2(n))$ sauts.

2 - Si $k < \lceil \log_2(n) \rceil$, proposer un algorithme en $\mathcal{O}(k + \frac{n}{2^{k-1}})$ sauts.

3 - Si $k = 2$, proposer un algorithme en $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ sauts.

**Correction.**

1 - La complexité en $O(\log_2(n))$ qui est indiquée nous aiguille vers une dichotomie. En effet, en supposant que l'on a $k \geq \lceil \log_2(n) \rceil$, on obtient le résultat sur les étages de $i$ à $j$ en jetant un étudiant depuis le $n^{\text{ème}}$ étage, où $n = j - i/2$, puis en itérant le procédé sur les étages de $i$ à $n-1$ si la chute à été fatale, et sur les étages de $n$ à $j$ dans le cas contraire. La méthode dichotomique nous garantit alors que l'on obtient le bon résultat (lorsqu'il ne reste plus qu'un seul étage, c'est-à-dire lorsque l'on calcule pour les étages de $i = j$), et ce avec une complexité logarithmique dans le pire des cas.

2 - Puisqu'ici on ne dispose que de $k < \lceil \log_2(n) \rceil$ étudiants, on ne peut pas appliquer directement la méthode dichotomique proposée précédemment. Cependant, on va remédier au problème de manière simple en appliquant une recherche dichotomique avec $k-1$ étudiants, de manière à délimiter un intervalle d'étages dans lequel se trouve l'étage recherché. On se sert alors du dernier étudiant restant pour parcourir l'intervalle de façon linéaire, donc en le jetant de chaque étage en partant du plus bas de l'intervalle, jusqu'au plus haut. Après avoir jeté les $k-1$ premiers étudiants, si l'on n'a pas encore trouvé le bon étage, il reste exactement $n/2^{k-1}$ étages dans l'intervalle de recherche, d'où une complexité dans le pire des cas en $O(k + n/2^{k-1})$ sauts.

3 - Dans le cas particulier où l'on a $k = 2$, on ne veut pas avoir à tester chaque étage de façon linéaire, c'est pourquoi on va reprendre à notre compte les idées précédentes, et notamment celle qui consiste à délimiter un intervalle de recherche. Nous découpons donc l'ensemble des étages

en “tranches” de $\sqrt{n}$ étages, avant de jeter le premier étudiant de chacun des étages de début de tranche. Lorsque l'étudiant y laisse sa peau, on se ramène au dernier étage $n$ testé qui ne soit pas fatal, et on n'a plus qu'à parcourir de manière linéaire l'intervalle allant de l'étage $n+1$ à l'étage fatal trouvé précédemment. On a ainsi deux séries d'essais en $O(\sqrt{n})$, et donc une complexité finale dans le pire des cas également en $O(\sqrt{n})$ sauts.

### Exercice 1.7.2. *Cherchez la star*

Dans un groupe de $n$ personnes (numérotées de 1 à $n$ pour les distinguer), une *star* est quelqu'un qui ne connait personne mais que tous les autres connaissent. Pour démasquer une star, s'il en existe une, vous avez juste le droit de poser des questions, à n'importe quel individu $i$ du groupe, du type “est-ce que vous connaissez $j$ ?” (noté “$i \rightarrow j$ ?”), on suppose que les individus répondent la vérité. On veut un algorithme qui trouve une star, s'il en existe, ou sinon qui garantit qu'il n'y a pas de star dans le groupe, en posant le moins de questions possibles.

1 - Combien peut-il y avoir de stars dans le groupe ?

2 - Ecrire le meilleur algorithme que vous pouvez et donner sa complexité en nombre de questions (on peut y arriver en $\mathcal{O}(n)$ questions).

3 - Donner une borne inférieure sur la complexité (en nombre de questions) de tout algorithme résolvant le problème. ((*Difficile*) prouver que la meilleure borne inférieure pour ce problème est $3n - \lfloor \log_2(n) \rfloor - 3$).

**Correction.**

1 - Il ne peut y avoir qu'une seule star dans le groupe, puisque s'il y en a une, elle ne connait personne, et donc tous les autres sont inconnus d'au moins une personne, et ne peuvent donc être eux aussi des stars.

2 - Lorsqu'on effectue le test $''i \rightarrow j\,?\,''$, c'est-à-dire lorsque l'on cherche à savoir si la personne $i$ connaît la personne $j$, on obtient le résultat suivant :

- si oui, alors $i$ n'est pas une star, mais $j$ en est potentiellement une.
- si non, alors $j$ n'est pas une star, mais $i$ en est potentiellement une.

L'algorithme consiste alors a parcourir le tableau des personnes une fois, en gardant en memoire à chaque instant la personne $i$ qui est jusqu'ici reconnue par tous, tandis qu'au $j^{\text{ème}}$ test, toutes les autres personnes, dont les indices sont les $k < j$ (avec $k \neq i$, bien sûr) ne peuvent pas des stars. Cet algorithme s'écrit donc de la manière suivante :

$i \leftarrow 1$ **et** $j \leftarrow 2$
**tant que** $j \leq n$ **faire**
  ▶ **si** $''i \rightarrow j''$ **alors faire** $j \leftarrow j+1$
    **sinon faire** $i \leftarrow j$ **et** $j \leftarrow j+1$
$i_{star} \leftarrow$ *vrai* **et** $k \leftarrow 1$
**tant que** ($k \leq n$ **et** $i_{star}$) **faire**
  ▶ **si** $''k \rightarrow i''$ **alors faire** $k \leftarrow k+1$
    **sinon faire** $i_{star} \leftarrow$ *faux*
**si** $i_{star}$ **alors faire retourner** “ *i est la star* ”
**sinon faire retourner** “ *il n'y a pas de star* ”

3 - En observant notre algorithme, on constate que l'on peut utiliser comme borne inférieure pour le nombre de questions la valeur $3n-2$, puisque l'on fait ici deux boucles sur $n-1$ personnes

et une boucle sur l'ensemble des $n$ personnes. Pour ce qui est de la borne inférieure optimale, il s'agit d'une question difficile, dont on n'explicitera pas la solution ici.

**Exercice 1.7.3.** *Bricolage*

Dans une boite à outils, vous disposez de $n$ écrous de diamètres tous différents et des $n$ boulons correspondants. Mais tout est mélangé et vous voulez appareiller chaque écrou avec le boulon qui lui correspond. Les différences de diamètre entre les écrous sont tellement minimes qu'il n'est pas possible de déterminer à l'œil nu si un écrou est plus grand qu'un autre. Il en va de même avec les boulons. Par conséquent, le seul type d'opération autorisé consiste à essayer un écrou avec un boulon, ce qui peut amener trois réponses possibles : soit l'écrou est strictement plus large que le boulon, soit il est strictement moins large, soit ils ont exactement le même diamètre.

1 - Ecrire un algorithme simple en $\mathcal{O}(n^2)$ essais qui appareille chaque écrou avec son boulon.

2 - Supposons qu'au lieu de vouloir appareiller tous les boulons et écrous, vous voulez juste trouver le plus petit écrou et le boulon correspondant. Montrer que vous pouvez résoudre ce problème en moins de $2n - 2$ essais.

3 - Prouver que tout algorithme qui appareille tous les écrous avec tous les boulons doit effectuer $\Omega(n \log n)$ essais dans le pire des cas.

*Problème ouvert :* proposer un algorithme en $o(n^2)$ essais pour résoudre ce problème.

**Correction.**

1 - Algorithme

Pour appareiller les boulons et les écrous, il suffit de prendre un boulon arbitrairement, de le tester avec tous les écrous.On trouve alors le bon en au plus $n$ tests et il suffit alors de recommencer avec tous les autres boulons.On obtient donc le résultat en au plus $\frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$ tests.

2 - Le plus petit écrou et son boulon

Le principe est de numéroter les boulons et les écrous de 1 à n, de manière arbitraire, et de faire progresser des compteurs (par exemple i et j) pour marquer le minimun courant dans l'une des catégories, et la structure en cours de test dans l'autre.

**début**
- **while** *($i \leq n$) && ($j \leq n$)* **do**
  - **si** *i=j=n* **alors** sortir de la boucle ;
  - **si** $ecrou.i = boulon.j$ **alors** s'en souvenir et faire $i := i + 1$;
  - **si** $ecrou.i < boulon.j$ **alors** $j := j + 1$ ; $min = ecrou$;
  - **si** $ecrou.i > boulon.j$ **alors** $i := i + 1$ ; $min = boulon$;

**fin**

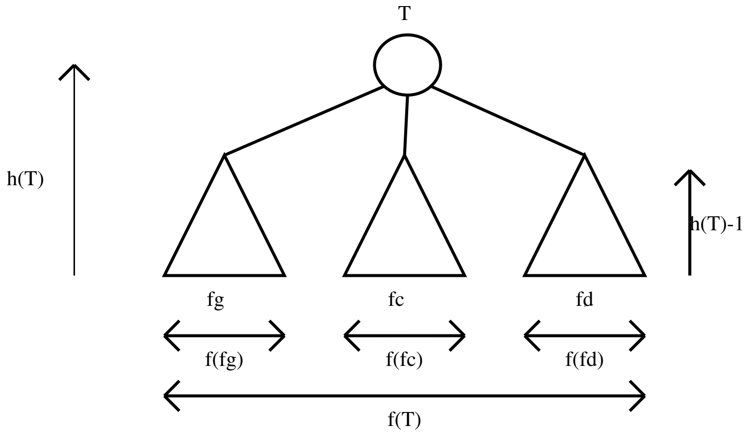
A la fin de cette boucle,
- si min=écrou, l'écrou i est le plus petit.
- si min=boulon, le boulon j est le plus petit. Et dans les deux cas, on sait déjà quel est l'élément qui correspond : en effet, le compteur de l'autre catégorie vaut n+1 (ou n dans un cas spécial),et on a donc déjà rencontré le minimum. la seule raison possible pour laquelle il n'a pas été conservé est donc qu'il ait été testé avec l'autre minimum. Pour le cas spécial ou i=j=n, le dernier test est inutile : en effet, on sait que l'un des deux, est minimum, et que une fois le boulon minimum atteind, j reste fixe : d'où le boulon n est minimum, et son homologue a soit déjà été trouvé, soit est l'écrou restant.

Cette boucle effectue donc au plus $2 * n - 2$ tests.

3 - Algorithme d'appareillage des écrous et de leur boulon

On note $f(T)$ le nombre de feuilles de l'arbre et $h(T)$ sa hauteur. Si T est un arbre ternaire $h(T) \geq \lceil log_3 f(T) \rceil$. Par induction sur la hauteur de T :

– Pour $h(T) = 0$ l'arbre à une feuille donc on a bien $h(T) \geq \lceil log_3 f(T) \lceil$.
– Pour $h(T) > 0$ un arbre ternaire a trois fils, le fils gauche $fg$, le fils central $fc$, et le fils droit $fd$ de hauteur inférieur à $h(T) - 1$.On suppose que $h(T) \geq \lceil log_3 f(T) \rceil$ est vrai pour $h(T) \leq k$ k étant fixé on veut démontrer que cette propriété est vrai aussi pour $h(T) = k + 1$. Les feuilles d'un arbre sont aussi celles de ses fils. Donc




$$f(T) = f(fd) + f(fg) + f(fd)$$

de plus :

$$h(T) \leq h(fd) + 1$$
$$h(T) \leq h(fg) + 1$$
$$h(T) \leq h(fc) + 1$$

or par induction comme $h(T) = k + 1$, $h(fg) \leq k$, $h(fg) \leq k$,et $h(fg) \leq k$ on a :

$$k = h(fc) \leq \lceil log_3 f(fc) \rceil$$

$$h(fd) \leq \lceil log_3 f(fd) \rceil$$
$$h(fg) \leq \lceil log_3 f(fg) \rceil$$

Donc $f(fc), f(fg), f(fd) \leq 3^k$ or :

$$f(T) = f(fc) + f(fg) + f(fd)$$

donc :

$$f(T) \leq 3 \times 3^k = 3^{k+1}$$

D' où on en déduit que :

$$h(T) \geq log_3 f(T)$$

Il y a $!n$ agencements boulons-écrous possibles donc l'arbre de décision, qui est ternaire a pour hauteur : $log_3!n \sim nlog_3 n$, donc la complexité dans le pire cas de l'algo est de : $\Omega(n \times logn)$.

# Chapitre 2

# Diviser pour régner

## 2.1 Algorithme de Strassen

Calculons un produit de matrices :

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

L'algorithme classique calcule en $Add(n) = n^2(n-1)$ additions et $Mult(n) = n^3$ multiplications. En effet, il y a $n^2$ coefficients à calculer, chacun correspondant un produit scalaire de taille $n$, donc avec $n$ multiplications, $n-1$ additions, et une affectation. Peut-on faire mieux ?[1] V. Strassen répond que oui : soient

$$\begin{aligned} p_1 &= a(g-h) \\ p_2 &= (a+b)h \\ p_3 &= (c+d)e \\ p_4 &= d(f-e) \\ p_5 &= (a+d)(e+h) \\ p_6 &= (b-d)(f+h) \\ p_7 &= (a-c)(e+g) \end{aligned}$$

alors on peut écrire

$$\begin{aligned} r &= p_5 + p_4 - p_2 + p_6 \\ s &= p_1 + p_2 \\ t &= p_3 + p_4 \\ u &= p_5 + p_1 - p_3 - p_7 \end{aligned}$$

Comptons maintenant les opérations :

| *Classique* | *Strassen* |
|---|---|
| $Mult(2) = 8$ | $Mult(2) = 7$ |
| $Add(2) = 4$ | $Add(2) = 18$ |

On a gagné une multiplication, mais en perdant 14 additions ; donc, pour des matrices $2x2$, c'est un bilan négatif. Par contre, il est remarquable que l'opération ne nécessite pas la commutativité de la multiplication. On peut donc l'utiliser avec des matrices de taille $n$ paire.

[1]Dans les temps anciens de l'informatique, il était surtout intéressant de diminuer le nombre de multiplications, quitte à augmenter le nombre d'additions. L'architecture pipelinée des processeurs actuels permet de réaliser, en moyenne, une addition ou une multiplication par temps de cycle.

Supposons donc $n = 2m$ pair, et utilisons la méthode précédente une seule fois, en partitionnant chaque matrice de départ en quatre sous-blocs de taille $m \times m$. On effectuera $m^3$ multiplications pour chaque $p_i$, d'où un total de $Mult(n) = 7m^3 = 7n^3/8$ multiplications. Pour les additions, il y a deux sources : les additions effectuées dans chaque produit $p_i$, donc au nombre de $7m^2(m-1)$, et les additions pour former les 18 matrices auxiliaires, au nombre de $18m^2$. D'où $Add(n) = 7m^3 + 18m^2 = 7n^3/8 + 18n^2/4$. Asymptotiquement, le terme dominant est en $n^3/7$ pour $Mult(n)$ comme pour $Add(n)$, et la nouvelle méthode est gagnante pour $n$ assez grand. La raison profonde est la suivante : une multiplication de deux matrices de taille $n$ requiert $O(n^3)$ opérations, alors que leur addition n'en demande que $O(n^2)$. Pour $n$ grand, les additions sont "gratuites" en face des multiplications. Ce qui n'était pas le cas pour les nombres réels.

L'algorithme de Strassen est l'application récursive de la décomposition précédente. On considère le cas où $n$ est une puissance de 2, i.e. $n = 2^s$. Si $n$ n'est pas une puissance de 2, on étend les matrices avec des 0 à la puissance de 2 supérieure :

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on remplacera dans les formules qui suivent $\log n$ par $\lceil \log n \rceil$.

Prenons donc $n = 2^s$. On fonctionne de manière récursive : on refait le même découpage pour chacun des produits de matrice $p_i$. On s'arrêtera quand on arrive à des matrices de taille 1, ou mieux, à la taille pour laquelle la méthode est plus coûteuse que la méthode classique ($n \approx 32$).

Soient :
- $M(n)$ = nombre de multiplications réalisées par l'algorithme de Strassen pour multiplier 2 matrices de taille $n$
- $A(n)$ = nombre d'additions réalisées par l'algorithme de Strassen pour multiplier 2 matrices de taille $n$

On a :

$$\begin{cases} M(1) = 1 \\ M(n) = 7 \times M(n/2) \end{cases} \Longrightarrow M(n) = 7^s = 7^{log_2(n)} = n^{log_2(7)}$$

Comme précédemment, les additions viennent de 2 sources : les additions liées aux additions de matrices pour la construction des termes $p_i$ et les additions effectuées pour les multiplications de matrices (appels récursifs). On a donc :

$$\begin{cases} A(1) = 0 \\ A(n) = 7 \times A(n/2) + 18 \times (n/2)^2 \end{cases} \Longrightarrow A(n) = 6 \times (n^{log_2(7)} - n^2)$$

(on verra Section 2.4 comment résoudre cette récurrence). On voit que l'ordre de grandeur du coût des calculs n'est plus en $n^3$, mais seulement en $n^{log_2 7}$.

L'algorithme de Strassen n'est pas souvent utilisé car il introduit des problèmes d'instabilité numérique. Notons enfin qu'il existe des algorithmes de complexité meilleure que celle de Strassen, et que le problème de déterminer la complexité du produit de deux matrices est encore ouvert. La seule borne inférieure connue est en $O(n^2)$ : il faut bien toucher chaque coefficient au moins une fois.

## 2.2 Produit de deux polynômes

Le but est de multiplier deux polynômes. On notera $n$-polynômes les polynômes de degré strictement inférieur à $n$, donc avec $n$ coefficients. Soient :
- $P$ : $n$-polynôme : $\sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$

– $Q$ : $n$-polynôme : $\sum_{i=0}^{n-1} b_i X^i$
– $R = P \times Q = ?$ : $(2n-1)$-polynôme

Soient :

– $M(n)$ = nombre de multiplications réalisées par l'algorithme pour multiplier deux $n$-polynômes
– $A(n)$ = nombre d'additions réalisées par l'algorithme pour multiplier deux $n$-polynômes

Avec l'algorithme usuel de multiplication de $n$-polynômes :

$$M(n) = n^2 \text{ et } A(n) = n^2 - \underbrace{(2n-1)}_{affectations} = (n-1)^2$$

On suppose $n$ pair, $n = 2m$

$$\left.\begin{array}{l} P = P_1 + X^m \times P_2 \\ Q = Q_1 + X^m \times Q_2 \end{array}\right) \text{avec } P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2\ m\text{-polynômes}$$

Soient :

$$\begin{array}{l} R_1 = P_1 \times Q_1 \\ R_2 = P_2 \times Q_2 \\ R_3 = (P_1 + P_2) \times (Q_1 + Q_2) \end{array}$$

On a alors : $R = R_1 + (R_3 - R_2 - R_1) \times X^m + R_2 \times X^{2m}$

Quel est l'intérêt ? On ne réalise que 3 multiplications de polynômes de taille moitié. Les additions sont de deux types : les additions de polynômes, et les additions liées aux multiplications de $m$-polynômes.

On suppose maintenant que $n = 2^s$ et on applique l'algorithme de manière récursive.

$$\left\{\begin{array}{l} M(1) = 1 \\ M(n) = 3 \times M(n/2) \end{array}\right. \Longrightarrow M(n) = 3^s = n^{log_2(3)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} A(1) = 0 \\ A(n) = \underbrace{3 \times A(n/2)}_{appels\ recursifs} + \underbrace{2 \times n/2}_{pour\ avoir\ R_3} + \underbrace{2 \times (n-1)}_{pour\ avoir\ R_3 - R_2 - R_1} + \underbrace{(n-2)}_{construction\ de\ R} \end{array}\right.$$

En effet, pour la construction de R :

$$R = R_1 + (R_3 - R_1 - R_2) \times X^m + R_2 \times X^{2m} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} r_i^1 \times X^i}_{X^0 \to X^{n-2}} + \sum_{i=0}^{n-2} z_i \times X^{i+n/2} + \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} r_i^2 \times X^{i+n}}_{X^n \to X^{2n-2}}$$

Tous les termes du terme du milieu s'additionnent aux termes de gauche et de droite, il faut donc faire $n-2$ additions. D'oú :

$$\left\{\begin{array}{l} A(1) = 0 \\ A(n) = 3 \times A(n/2) + 4 \times n - 4 \end{array}\right. \Longrightarrow A(n) = 6n^{log_2(3)} - 8n + 2$$

(on verra Section 2.4 comment résoudre cette récurrence)

**Remarque** Le meilleur algorithme de multiplication de polynômes est en $O(n \times log(n))$, il est obtenu par transformée de Fourrier rapide (FFT).

$$\left[ P, Q \underbrace{\longrightarrow}_{evaluation} \underbrace{P(x_i), Q(x_i)}_{en\ 2n\ points} \longrightarrow P(x_i) \times Q(x_i) \underbrace{\longrightarrow}_{interpolation} P \times Q \right]$$

L'évaluation et l'interpolation sont réalisées en $n^2$ par la méthode classique, en utilisant Newton et Lagrange. Pour la FFT, on évalue les polynômes en les racines complexes de l'unité.

## 2.3 Master theorem

Diviser pour règner :
On considère un problème de taille $n$, qu'on découpe en $a$ sous-problèmes de taille $n/b$ permettant de résoudre le problème. Le coût de l'algorithme est alors :

$$\begin{cases} S(1) = 1 \\ S(n) = a \times S(n/b) + \underbrace{Reconstruction(n)}_{c \times n^\alpha \ en\ general} \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{l|c|c|c|c} & \text{a} & \text{b} & \alpha & \text{c} \\ \hline \text{Strassen} & 7 & 2 & 2 & 18 \\ \hline \text{Polynomes} & 3 & 2 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$$S(n) = a \times S(n/b) + R(n) = a^2 \times S(n/b^2) + a \times R(n/b) + R(n) = \ldots$$

On pose $n = b^k$, on a alors :

$$S(n) = \underbrace{a^k}_{n^{log_b(a)}} \times S(1) + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} a^i \times R(n/b^i)}_{\sum} \quad avec\ R(n) = c \times n^\alpha$$

et :

$$\sum = c \times n^\alpha \sum_{i=0}^{k-1} (a/b^\alpha)^i$$

On distingue alors plusieurs cas :

1. $(a > b^\alpha)$ : $\sum \sim n^\alpha \times (\frac{a}{b^\alpha})^k \sim a^k \Longrightarrow S(n) = O(n^{log_b(a)})$
2. $(a = b^\alpha)$ : $\sum \sim k \times n^\alpha \Longrightarrow S(n) = O(n^\alpha \times log(n))$
3. $(a < b^\alpha)$ : $\sum \sim c \times n^\alpha \times \frac{1}{1 - \frac{a}{b^\alpha}} \Longrightarrow S(n) = O(n^\alpha)$

Retour sur Strassen :
A la lumière de ce qui précède, et si on découpait les matrices en 9 blocs de taille $n/3$ au lieu de 4 blocs de taille $n/2$ ?

$$\left( \begin{array}{c|c|c} \ & \ & \ \\ \hline \ & \ & \ \\ \hline \ & \ & \ \end{array} \right) \times \left( \begin{array}{c|c|c} \ & \ & \ \\ \hline \ & \ & \ \\ \hline \ & \ & \ \end{array} \right)$$

On a :

| a | b | $\alpha$ | c |
|---|---|---|---|
| a | 3 | 2 | |

Pour que l'algorithme soit plus intéressant que Strassen, il faut que :

$$\begin{array}{rcl} log_3(a) & < & log_2(7) \\ \Rightarrow \quad a & < & e^{log_2(7) \times log_2(3)} \\ \Rightarrow \quad a & < & 7^{log_2(3)} \approx 21,8 \end{array}$$

C'est un problème ouvert : on connaît une méthode avec $a = 23$ mais pas avec $a = 21$ !

## 2.4 Résolution des récurrences

### 2.4.1 Résolution des récurrences homogènes

$$\begin{cases} p_0 \times s_n + p_1 \times s_{n-1} + \cdots + p_k \times s_{n-k} = 0 \\ p_i constantes \end{cases}$$

Soit $P = \sum_{i=0}^{k} p_i \times X^{k-i}$. On cherche les racines de P. Si les racines de P sont distinctes :

$$s_n = \sum_{i=0}^{k} c_i \times {r_i}^n$$

Sinon, si $q_i$ est l'ordre de multiplicité de $r_i$

$$s_n = \sum_{i=0}^{l} \underbrace{P_i(n)}_{polynome\ de\ degre\ q_i-1} \times {r_i}^n$$

### 2.4.2 Résolution des récurrences avec second membre

On note $E$ l'opérateur de décalage : $E\{s_n\} = \{s_{n+1}\}$ On définit les opérations suivantes sur les suites :

$$\begin{aligned} c.\{s_n\} &= \{c.s_n\} && (2.1) \\ (E_1 + E_2)\{s_n\} &= E_1\{s_n\} + E_2\{s_n\} && (2.2) \\ (E_1 E_2)\{s_n\} &= E_1(E_2\{s_n\}) && (2.3) \end{aligned}$$

$$\left( ex : \begin{array}{c} (E-3)\{s_n\} = \{s_{n+1} - 3s_n\} \\ (2+E^2)\{s_n\} = \{2s_n + s_{n+2}\} \end{array} \right)$$

$P(E)$ annule $\{s_n\}$ si $P(E)\{s_n\} = \overline{0}$ ex :

| *suite* | *annulateur* |
|---|---|
| $\{c\}$ | $E-1$ |
| $\{Q_k(n)\}$ | $(E-1)^{k+1}$ |
| $\{c^n\}$ | $E-c$ |
| $\{c^n \times Q_k(n)\}$ | $(E-c)^{k+1}$ |

où $Q_k(n)$ est un polynôme de degré $k$. En effet, il suffit de montrer la dernière relation, par récurrence sur $k$ :

$$\begin{aligned} (E-c)^{k+1} \underbrace{\{c^n \times Q_k(n)\}}_{\{c^n \times (a_0 n^k + Q_{k-1}(n))\}} &= (E-c)^k \underbrace{[(E-c)\{c^n(a_0 n^k + Q_{k-1}(n))\}]}_{\{c^{n+1}(a_0(n+1)^k + Q_{k-1}(n+1)) - c^{n+1}(a_0 n^k + Q_{k-1}(n))\}} \\ &= (E-c)^k [c^{n+1} \times R_{k-1}(n)] \\ &= \overline{0} \end{aligned}$$

(par hypothèse de récurrence)

Résolution pour les additions dans l'algorithme de Strassen :

$$A(n) = 7 \times A(n/2) + 18 \times \frac{n^2}{4}$$

On a $n = 2^s$, on pose $A_s = A(2^s)$

$$A_{s+1} = 7 \times A_s + 18 \times \frac{(2^{s+1})^2}{4} = 7 \times A_s + 18 \times 4^s$$

$$(E-4)\ \underbrace{(E-7)\{A_s\}}_{A_{s+1}-7A_s=18\times 4^s} = \overline{0}$$

$$\Rightarrow A_s = k_1 \times 7^s + k_2 \times 4^s$$

avec :

$$\begin{array}{rcl} A_0 & = & 0 \\ A_1 & = & 18 \end{array}$$

On en déduit les valeurs de $k_1$ et $k_2$ données plus haut.

Résolution pour les additions dans l'algorithme de multiplication de polynômes :

$$\begin{array}{rcl} A(n) & = & 3 \times A(n/2) + 4n - 4 \\ A_s & = & 3 \times A_{s-1} + 4 \times 2^s - 4 \end{array}$$

D'où : $(E-1)(E-2)(E-3)\{A_s\} = \overline{0}$

$$\Rightarrow A_s = k_1 \times 3^s + k_2 \times 2^s + k_3$$

avec :

$$\begin{array}{rcl} A_0 & = & 0 \\ A_1 & = & 4 \\ A_2 & = & 24 \end{array}$$

On en déduit les valeurs de $k_1 = 6$, $k_2 = -8$ et $k_3 = 2$ données plus haut.

## 2.5 Multiplication et inversion de matrices

Soient :
- $M(n)$ = coût de la multiplication de 2 matrices d'ordre $n$
- $I(n)$ = coût de l'inversion d'une matrice d'ordre $n$
- Hypothèses : $\begin{array}{l} -\ O(n^2) \leq \begin{array}{c} M(n) \\ I(n) \end{array} \leq O(n^3) \\ -\ M(n) \textit{ et } I(n) \textit{ croissants} \end{array}$

**Théorème 3.** *$M(n)$ et $I(n)$ ont le même ordre de grandeur.*

**Preuve**. On montre que chaque opération est au moins aussi "difficile" que l'autre :

### La multiplication est au moins aussi complexe que l'inversion

On veut multiplier les matrices $A$ et $B$ de taille n. Soit $Z$ de taille $3n$ suivante :

$$Z = \begin{pmatrix} I & A & 0 \\ 0 & I & B \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Z^{-1} = \begin{pmatrix} I & -A & A.B \\ 0 & I & -B \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

D'où : $M(n) \leq I(3n)$

**L'inversion est au moins aussi complexe que la multiplication**

On procède en deux étapes :

**Si A est symétrique définie positive**

$$A = \begin{pmatrix} B & {}^tC \\ C & D \end{pmatrix}$$

Soit $S = D - C.B^{-1}.\,{}^tC$ (Shur complement).

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} + B^{-1}.\,{}^tC.S^{-1}.C.B^{-1} & -B^{-1}.\,{}^tC.S^{-1} \\ -S^{-1}.C.B^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix}$$

Il suffit de construire :

$$B^{-1}, C.B^{-1}, (C.B^{-1}).\,{}^tC, S^{-1}, S^{-1}.(C.B^{-1}),\ {}^t(C.B^{-1}).(S^{-1}.C.B^{-1})$$

d'où : $I(n) = 2 \times I(n/2) + 4 \times M(n) + O(n^2) = O(M(n))$

**Cas général** On pose $B = {}^tA \times A$. On veut calculer $A^{-1}$, et on sait calculer $B^{-1}$ car $B$ est symétrique définie positive.

$$I = B^{-1}.B = B^{-1}.(\,{}^tA.A) = (B^{-1}.\,{}^tA).A \Rightarrow A^{-1} = B^{-1}.\,{}^tA$$

D'où : $I(n) = 2 \times M(n) + O(M(n)) = O(M(n))$

□

## 2.6 Exercices

**Exercice 2.6.1.** *Matrices de Tœplitz*

Une *matrice de Tœplitz* est une matrice $n \times n$ $(a_{i,j})$ telle que $a_{i,j} = a_{i-1,j-1}$ pour $2 \leq i, j \leq n$.

1 - La somme de deux matrices de Tœplitz est-elle une matrice de Tœplitz ? Et le produit ?

2 - Trouver un moyen d'additionner deux matrices de Tœplitz en $\mathcal{O}(n)$.

3 - Comment calculer le produit d'une matrice de Tœplitz $n \times n$ par un vecteur de longueur $n$ ? Quelle est la complexité de l'algorithme ?

**Correction.**

1 – Par linéarité, la somme de deux Tœplitz reste une Tœplitz. Ce n'est pas vrai pour le produit. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2 – On n'additionne que les premières lignes et les premières colonnes, ce qui fait $2n - 1$ opérations.

3 – On ne considère que les matrices de taille $2^k \times 2^k$.

On décompose la matrice en blocs de taille $n = 2^{k-1}$

$$\mathbf{M} \times \mathbf{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

On pose :

$$\begin{array}{rcl} U & = & (C+A)X \\ V & = & A(Y-X) \\ W & = & (B+A)Y \end{array}$$

et on calcule :

$$\mathbf{M}\times\mathbf{T} = \begin{pmatrix} W-V \\ U-V \end{pmatrix}$$

Calcul de la complexité : On note respectivement $M(n)$ et $A(n)$ le nombre de multiplications et d'additions pour un produit de matrices $n\times n$.

$$\begin{array}{rcl} M(2^k) & = & 3M(2^{k-1}) \\ M(1) & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} A(2^k) & = & 3A(2^{k-1}) + 2(2^k-1) + 2^{k-1} + 2^k \\ A(1) & = & 0 \end{array}$$

On résoud les récurrences :
on pose $M_s = M(2^s)$, et on pose $A_s = A(2^s)$.
le calcul pour les multiplications :

$$\begin{cases} M_s = 3M_{s-1} \\ M_0 = 1 \end{cases}$$

$$(E-3)M_s = \bar{0}; M_s = 3^{\log n} = n^{\log 3}$$

puis le calcul pour les additions :

$$\begin{cases} A_s = 3A_{s-1} + 2*(2^s-1) + 2^{s-1} + 2^s \\ A_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (E-3)A_s = 2^{k+1} - 2 + 2^{k-1} + 2^k \\ (E-3)A_s = 7\cdot 2^{k+1} - 2 \\ (E-2)(E-3)A_s = \bar{0} \\ A_s = i3^s + j2^s + l \\ A_0 = A(1) = 0 \longrightarrow l+i+j=0 \\ A_1 = A(2) = 5 \longrightarrow 3i+2j+l=5 \end{array}$$

**Finir..**

**Exercice 2.6.2.** *Recherche d'un élément majoritaire*

Soit $E$ une liste de $n$ éléments rangés dans un tableau numéroté de 1 à $n$. On suppose que la seule opération qu'on sait effectuer sur les éléments est de vérifier si deux éléments sont égaux ou non. On dit qu'un élément $x \in E$ est *majoritaire* si l'ensemble $E_x = \{y \in E | y = x\}$ a strictement plus de $n/2$ éléments. Sauf avis contraire, on supposera que $n$ est une puissance de 2. On s'intéressera à la complexité dans le pire des cas.

**1 - Algorithme naïf**

Écrire un algorithme calculant le cardinal de $c_x$ de $E_x$ pour un $x$ donné. En déduire un algorithme pour vérifier si $E$ possède un élément majoritaire. Quelle est la complexité de cet algorithme ?

**2 - Diviser pour règner**

2.1- Donner un autre algorithme récursif basé sur un découpage de $E$ en deux listes de même taille. Quelle est sa complexité ?

2.2 - Donner un algorithme similaire (en précisant sa complexité) dans le cas général où $n$ n'est pas une puissance de 2.

**3 - Encore mieux**

Pour améliorer l'algorithme précédent, on va se contenter dans un premier temps de mettre au point un algorithme possédant la propriété suivante :

- soit l'algorithme garantit que $E$ ne possède pas d'élément majoritaire,
- soit l'algorithme fournit un entier $p > n/2$ et un élément $x$ tels que $x$ apparaisse au plus $p$ fois dans $E$ et tout élément autre que $x$ apparaît au plus $n - p$ fois dans $E$.

3.1 - Donner un algorithme récursif possédant cette propriété. Quelle est sa complexité ?

3.2 - Même question quand $n$ n'est pas une puissance de 2.

3.3 - En déduire un algorithme efficace vérifiant si $E$ possède un élément majoritaire.

**4 - Encore encore mieux**

On change la manière de voir les choses. On a un ensemble de $n$ balles et on cherche le cas échéant s'il y a une couleur majoritaire parmi les balles.

4.1 - Supposons que les balles soient rangées en file sur une étagère, de manière à n'avoir jamais deux balles de la même couleur à côté. Que peut-on en déduire sur le nombre maximal de balles de la même couleur ?

On a un ensemble de $n$ balles, une étagère vide où on peut les ranger en file et une corbeille vide. Considérons l'algorithme suivant :

**- Phase 1 -** Prendre les balles une par une pour les ranger sur l'étagère ou dans la corbeille. SI la balle n'est pas de la même couleur que la dernière balle sur l'étagère, la ranger à côté, et si de plus la corbeille n'est pas vide, prendre une balle dans la corbeille et la ranger à côté sur l'étagère. SINON, c'est à dire si la balle est de la même couleur que la dernière balle sur l'étagère, la mettre dans la corbeille.

**- Phase 2 -** Soit $C$ la couleur de la dernière balle sur l'étagère à la fin de la phase 1. On compare successivement la couleur de la dernière balle sur l'étagère avec $C$. SI la couleur est la même on jette les deux dernières balles sur l'étagère, sauf s'il n'en reste qu'une, auquel cas on la met dans la corbeille. SINON on la jette et on jette une des balles de la corbeille, sauf si la corbeille est déjà vide auquel cas on s'arrête en décrétant qu'il n'y a pas de couleur majoritaire. Quand on a épuisé toutes les balles sur l'étagère, on regarde le contenu de la corbeille. Si elle est vide alors il n'y a pas de couleur majoritaire, et si elle contient au moins une balle alors $C$ est la couleur majoritaire.

4.2 - (*Correction de l'algorithme*) Montrer qu'à tout moment de la phase 1, toutes les balles éventuellement présentes dans la corbeille ont la couleur de la dernière balle de l'étagère. En déduire que s'il y a une couleur dominante alors c'est $C$.

Prouver la correction de l'algorithme.

4.3 - (*Complexité*) Donner la complexité dans le pire des cas en nombre de comparaisons de couleurs des balles.

**5 - Optimalité**

On considère un algorithme de majorité pour les couleurs de $n$ balles. Le but est de regarder faire l'algorithme, en choisissant au fur et à mesure les couleurs des balles pour que l'algorithme ait le maximum de travail (tout en restant cohérent dans le choix des couleurs). On obtiendra ainsi une borne inférieure de complexité pour un algorithme de majorité. C'est la technique de l'*adversaire*.

À tout moment de l'algorithme, on aura une partition des balles en deux ensembles : l'*arène* et les *gradins*. L'arène contient un certain nombre de composantes connexes de deux sortes : les *binômes* et les *troupeaux*. Un binôme est un ensemble de deux balles pour lesquelles l'algorithme a déjà testé si elles étaient de la même couleur et a répondu non. Un troupeau est un ensemble non vide de balles de la même couleur, connectées par des tests de l'algorithme. Ainsi, un troupeau avec $k$ éléments a subi au moins $k-1$ comparaisons de couleurs entre ses membres. Soient $B$ le nombre de binômes et $T$ le nombre de troupeaux. Soient $g$ le nombre d'éléments dans les gradins et $t$ le nombre total d'éléments dans tous les troupeaux. Enfin, soit $m = \lfloor n/2 \rfloor + 1$ le "*seuil de majorité*".

Au début de l'algorithme toutes les balles sont des troupeaux à un élément. La stratégie de l'adversaire est la suivante. L'algorithme effectue un test $couleur(x) = couleur(y)$?

1. Si $x$ ou $y$ sont dans les gradins, la réponse est non.
2. Si $x$ (resp. $y$) est dans un binôme, la réponse est non et $x$ (resp. $y$) est envoyé dans les gradins alors que l'élément restant devient un troupeau singleton.
3. Si $x$ et $y$ sont dans le même troupeau la réponse est oui.
4. Si $x$ et $y$ sont dans des troupeaux différents alors cela dépend de $d = B + t$.
   (a) $d > m$ : cela signifie que les balles sont dans des troupeaux singletons. La réponse est non et les balles deviennent un nouveau binôme.
   (b) $d = m$ : la réponse est oui et les troupeaux de $x$ et $y$ fusionnent.

5.1 - Vérifier que les quatre cas précédents traitent tous les cas possibles.

Montrer qu'à tout moment $d \geq m$ et que si $d > m$ alors tous les troupeaux sont des singletons.

5.2 - Montrer qu'à tout moment les deux coloriages suivants sont consistants avec les réponses de l'adversaire :

($i$) Toutes les balles sont de couleurs différentes sauf celles qui sont dans un même troupeau.
($ii$) Une même couleur est attribuée à toutes les balles de tous les troupeaux et à une balle de chaque binôme. Les balles restantes ont chacune une couleur distincte.

5.3 - Montrer que si un algorithme correct s'arrête alors l'arène ne contient qu'une seule composante connexe qui est un troupeau de taille $m$.

5.4 - À tout moment le nombre de comparaisons inégales effectuées par l'algorithme est au moins $2g + B$ et le nombre de comparaisons égales est au moins $t - T$.

5.5 - Considérons un algorithme qui résout la majorité. Montrer qu'il existe une donnée pour laquelle l'algorithme effectue au moins $2(n - m) = 2\lceil n/2 \rceil - 1$ comparaisons d'inégalité et au moins $\lfloor n/2 \rfloor$ comparaisons d'égalité, et donc au moins au total $3\lceil n/2 \rceil - 2$ comparaisons.

**Correction.**

On se restreint ici aux algorithmes où la seule opération qu'on sait effectuer sur les éléments est de tester si deux éléments sont égaux. Si la réponse est `OUI`, on dira qu'il s'agit d'une *comparaison égale*, et si la réponse est `NON` d'une *comparaison inégale*.

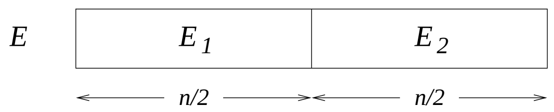
*Remarque :* s'il existe un élément majoritaire, il est nécessairement unique.

**1 - Algorithme naïf**

**début**
    **pour** $i$ **de** *1* **à** $n$ **faire**
        $c \leftarrow 0$ ;
        **pour** $j$ **de** *1* **à** $n$ **faire**
            **si** $E[j] = E[i]$ **alors** $c \leftarrow c + 1$ ;
        **si** $c > n/2$ **alors** retourner "$E[i]$ est majoritaire"
    Retourner "Pas d'élément majoritaire".
**fin**

**Complexité :** nombre total de comparaisons $= n^2$.

**2 - Diviser pour règner**




2.1 - **Principe :**

- Couper $E$ en deux tableaux $E_1$ et $E_2$ de tailles $n/2$ (on suppose $n$ pair).
- S'il existe un élément majoritaire $x$ dans $E$, alors $x$ est majoritaire dans au moins une des deux listes $E_1$ et $E_2$ (en effet si $x$ non majoritaire dans $E_1$, ni dans $E_2$, alors dans $E$, $c_x \leq n/2 + n/2 = n$).
- Algorithme récursif : calculer les éléments majoritaires de $E_1$ et de $E_2$ (s'ils existent) avec le nombre total d'occurences de chacun et en déduire si l'un des deux est majoritaire dans $E$.

L'algorithme suivant $Majoritaire(i, j)$ renvoie un couple qui vaut $(x, c_x)$ si $x$ est majoritaire dans le sous-tableau $E[i..j]$ avec $c_x$ occurences et qui vaut $(-, 0)$ s'il n'y a pas de majoritaire dans $E[i..j]$, l'appel initial étant $Majoritaire(1, n)$. La fonction $Occurence(x, i, j)$ calcule le nombre d'occurences de $x$ dans le sous-tableau $E[i..j]$.

**Algorithm:**$Majoritaire(i, j)$

---

**début**
- **si** $i = j$ **alors** retourner $(E[i], 1)$ ;
- **sinon**
  - $(x, c_x) = Majoritaire(i, \lfloor (i+j)/2 \rfloor)$ ;
  - $(y, c_y) = Majoritaire(\lfloor (i+j)/2 \rfloor + 1, j)$ ;
  - **si** $c_x \neq 0$ **alors** $c_x \leftarrow c_x + Occurence(x, \lfloor (i+j)/2 \rfloor + 1, j)$ ;
  - **si** $c_y \neq 0$ **alors** $c_y \leftarrow c_y + Occurence(x, i, \lfloor (i+j)/2 \rfloor)$ ;
  - **si** $c_x > \lfloor (j-i+1)/2 \rfloor$ **alors** retourner $(x, c_x)$ ;
  - **sinon si** $c_y > \lfloor (j-i+1)/2 \rfloor$ **alors** retourner $(y, c_y)$ ;
  - **sinon** retourner $(-, 0)$.

**fin**

**Complexité :** le nombre total de comparaisons dans le pire des cas $C(n)$ vérifie la relation (on suppose que $n$ est une puissance de 2) :

$$C(n) = 2(C(\frac{n}{2}) + \frac{n}{2}) \text{ avec } C(1) = 0$$

On en déduit $C(n) = n \log_2(n)$.

2.2 - Si $n$ n'est pas une puissance de 2, les trois points du principe précédent restent vrais en coupant $E$ en un tableau de taille $\lfloor n/2 \rfloor$ et l'autre de taille $\lceil n/2 \rceil$, et l'algorithme décrit ci-dessus fonctionne sans aucune modification. La récurrence pour la complexité est alors $C(n) = C(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + C(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n$ avec $C(1) = 0$, dont la résolution donne $C(n) \sim n \log_2(n)$.

**3 - Encore mieux**

**Remarque 1 :** soit $x$ vérifiant la propriété, alors aucun autre élément $z \neq x$ ne peut être majoritaire (car $c_z \leq n - p < n/2$), donc, dans ce cas, $x$ est un *candidat-majoritaire*. Autrement dit un algorithme vérifiant les propriétés de l'exercice nous fournit :

- soit la garantie qu'il n'existe aucun élément majoritaire,
- soit un *candidat-majoritaire* $x$, dont on peut vérifier ensuite s'il est vraiment majoritaire en reparcourant une fois le tableau (soit $n - 1$ comparaisons).

**Remarque 2 :** un élément majoritaire $x$ est bien un *candidat-majoritaire* avec $p = c_x$ (donc s'il existe un majoritaire, il sera bien proposé comme *candidat-majoritaire* par l'algorithme).

3.1 - Algorithme récursif $Candidat - majoritaire(E)$ renvoyant `AUCUN` s'il n'y a pas d'élément majoritaire dans $E$ et sinon renvoyant $(x, p)$ avec les bonnes propriétés.

**Algorithm:**$Candidat - majoritaire(E)$

---

**début**
- **si** *$E$ n'a qu'un élément $x$* **alors** retourner $(x, 1)$ ;
- **sinon**
  - couper $E$ en deux tableaux $E_1$ et $E_2$ de taille $n/2$ ;
  - appeler $Candidat - majoritaire(E_1)$ qui renvoie `AUCUN` ou $(x, p)$ ;
  - appeler $Candidat - majoritaire(E_2)$ qui renvoie `AUCUN` ou $(y, q)$ ;
  - suivant la résponse pour $E_1$ et $E_2$, faire
  - **si** `AUCUN` *et* `AUCUN` **alors** retourner `AUCUN` ;
  - **si** `AUCUN` *et* $(y, q)$ **alors** retourner $(y, q + \frac{n}{4})$ ;
  - **si** $(x, p)$ *et* `AUCUN` **alors** retourner $(x, p + \frac{n}{4})$ ;
  - **si** $(x, p)$ *et* $(y, q)$ **alors**
    - **si** $x \neq y$ *et* $p > q$ **alors** retourner $(x, p + \frac{n}{2} - q)$ ;
    - **si** $x \neq y$ *et* $p < q$ **alors** retourner $(y, q + \frac{n}{2} - p)$ ;
    - **si** $x \neq y$ *et* $p = q$ **alors** retourner `AUCUN`
      (sinon ce serait $x$ ou $y$ mais $c_x \leq \frac{n}{2}$ et $c_y \leq \frac{n}{2}$) ;
    - **si** $x = y$ **alors** retourner $(x, p + q)$

**fin**

**Complexité :** on a supposé $n$ un puissance de 2, le nombre de comparaisons $C(n)$ pour un tableau à $n$ éléments vérifie : $C(n) = 2C(\frac{n}{2}) + 1$ avec $C(1) = 0$, ce qui donne $C(n) = n - 1$.

3.2 - Si on ne suppose pas que $n$ est une puissance de 2, couper $E$ en deux tableaux de tailles $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $\lceil \frac{n}{2} \rceil$, et affiner l'analyse.

**Si $n$ est pair**, faire comme à la question précédente en remplaçant juste $\frac{n}{4}$ par $\lceil \frac{n}{4} \rceil$. La complexité vérifie alors $C(n) = C(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + C(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 1$.

**Si $n$ est impair**, $n = 2m + 1$, adapter la procédure précédente de la manière suivante :

**début**
- **si** *$m = 0$, $E$ n'a qu'un élément $x$* **alors** retourner $(x, 1)$ ;
- **sinon**
  - couper $E$ en un tableau $E_1$ de taille $m$ et un tableau $E_2$ de taille $m + 1$ ;
  - appeler $Candidat - majoritaire(E_1)$ qui renvoie `AUCUN` ou $(x, p)$ ;
  - appeler $Candidat - majoritaire(E_2)$ qui renvoie `AUCUN` ou $(y, q)$ ;
  - suivant la résponse pour $E_1$ et $E_2$, faire
  - **si** `AUCUN` *et* `AUCUN` **alors** retourner `AUCUN` ;
  - **si** `AUCUN` *et* $(y, q)$ **alors** retourner $(y, q + \lceil \frac{m}{2} \rceil)$ ;
  - **si** $(x, p)$ *et* `AUCUN` **alors** retourner $(x, p + \lceil \frac{m+1}{2} \rceil)$ ;
  - **si** $(x, p)$ *et* $(y, q)$ **alors**
    - **si** $x \neq y$ *et* $p \geq q$ **alors** retourner $(x, p + m + 1 - q)$ ;
    - **si** $x \neq y$ *et* $q \geq p + 1$ **alors** retourner $(y, q + m - p)$ ;
    - **si** $x = y$ **alors** retourner $(x, p + q)$

**fin**

La complexité vérifie toujours $C(n) = C(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + C(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + 1$ avec $C(1) = 0$. La résolution de cette formule de récurrence donne $C(n) = n - 1$.

3.3 - Algorithme complet pour rechercher un majoritaire :
- Recherche d'un *candidat-majoritaire* avec l'algorithme précédent, soit $n - 1$ comparaisons.
- Si l'algorithme renvoie un candidat, vérification que le candidat est bien majoritaire en reparcourant le tableau, soit $n - 1$ comparaisons.

Complexité au total $= 2n - 2$ comparaisons.

**4 - Encore encore mieux**

4.1 - Soit $k$ le nombre de balles rangées en file sur l'étagère telles que deux balles consécutives n'aient jamais la même couleur, alors le nombre de balles d'un même couleur est toujours $\leq \lceil \frac{k}{2} \rceil$.

Preuve précise : utiliser le *lemme des tiroirs*, c'est à dire “si $M$ chaussettes sont rangées parmi $m$ tiroirs avec $M > m$, alors il existe un tiroir avec au moins deux chaussettes”. Ici découper l'étagère en $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ tiroirs disjoints qui sont des paires d'emplacements consécutifs sur l'étagère. S'il y a plus de $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ balles d'une même couleur, il en existe deux dans un même tiroir, c'est à dire ici adjacentes sur l'étagère.

4.2 - *Correction de l'algorithme :* on montre des invariants (propriétés restants vraies pendant une phase de l'algorithme).

**- Phase 1 -**
**Invariant 1 :** si la corbeille n'est pas vide, toutes les balles dans la corbeille ont la même couleur que la dernière ballle sur l'étagère.
**Preuve :** montrer que si la prop. est vraie à un instant donné, elle reste vraie à l'étape suivante. Plusieurs cas peuvent se produire ici, vérifier la conservation de la propriété dans chaque cas (à faire) :

- ajout d'une balle différente de la dernière et corbeille pleine ...
- ajout d'une balle différente de la dernière et corbeille vide ...
- ajout d'une balle identique à la dernière ...

**Invariant 2 :** sur l'étagère, il n'y a jamais deux balles de même couleur côte à côte.
**Preuve :** idem au cas par cas.

**Fin de Phase 1 :** soit $C$ la couleur de la dernière balle sur l'étagère. Les balles d'autres couleurs sont dans les $k - 1$ premières balles de l'étagère, où $k$ est le nombre de balles sur l'étagère et $k \leq n$. Comme il n'y a pas deux balles adjacentes de même couleur, d'après la question 1, le nombre de balles d'une couleur différente de $C$ est $\leq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Donc la seule couleur candidate pour être majoritaire est $C$.

**- Phase 2 -** vérifie si $C$ est bien majoritaire :

- Quand on retire une paire de balles, on en a toujours une de couleur $C$ et l'autre différente, donc $C$ est majoritaire si et seulement si une majorité de balles à la fin (étagère + corbeille) est de couleur $C$.
- Deux cas de fin se présentent :
  - La phase 2 s'arrête car on a besoin d'une balle de la corbeille mais la corbeille est vide. Dans ce cas, la dernière balle sur l'étagère n'est pas de couleur $C$ et d'après la question 1, au plus la moitié des balles restant sur l'étagère sont de couleur $C$, il n'y a pas de majoritaire. Ok, c'est bien ce que répond l'algorithme.
  - L'algorithme va jusqu'au bout de l'étagère, les balles restantes (s'il en reste) sont dans la corbeille, elles sont toutes de couleur $C$. Donc $C$ est majoritaire si et seulement si la corbeille est non vide, c'est bien le test effectué par l'algorithme.

4.3 - **Complexité :**
Phase 1 : $(n - 1)$ comparaisons ($-1$ car la première balle est directement posée sur l'étagère).
Phase 2 : une comparaison par paire de balles éliminées, plus éventuellement une comparaison avec $C$ pour la dernière balle de l'étagère s'il en reste une unique, soit $\leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ comparaisons ($-1$ car au début de la phase 2, on sait que la dernière balle sur l'étagère est de couleur $C$).
Complexité totale $\leq \lceil \frac{3n}{2} \rceil$ comparaisons.

### 5 - Optimalité

5.1 - Tous les cas possibles sont bien représentés. Au départ $d = n$ et tous les troupeaux sont des singletons. Quels cas modifient $d$ ?
Cas 1 : non.
Cas 2 : non (car -1 binôme, +1 dans les troupeaux).
Cas 3 : non.
Cas 4(a) : oui, $d$ diminue de 1 (mais les troupeaux restent des singletons).
Cas 4(b) : non.
Conclusion :

- Invariant $d \geq m$ (si $d$ change, c'est que $d > m$ avec le cas 4(a) et alors $d - 1 \geq m$).
- $d > m$ implique que tous les troupeaux sont des singletons.

5.2 - Consistence des réponses de l'adversaire à tout moment.
Coloration $(i)$ : correspond bien aux réponses données, car respecte les binômes (*comparaisons inégales*) et les troupeaux (*comparaisons égales*). De plus les balles envoyées dans les gradins ont toujours engendré la réponse NON aux comparaisons, ce qui fonctionne si leurs couleurs sont toutes différentes et différentes des couleurs des balles dans l'arène.
Coloration $(ii)$ : idem avec de plus le fait qu'une balle dans un binôme n'a jamais été comparée à quelqu'un d'autre que son binôme (donc pas de risque de contradiction avec les choix des couleurs ailleurs).

5.3 - Un algorithme correct ne peut s'arrêter que si l'arène ne contient qu'une composante connexe qui sera un troupeau de taille $m$.

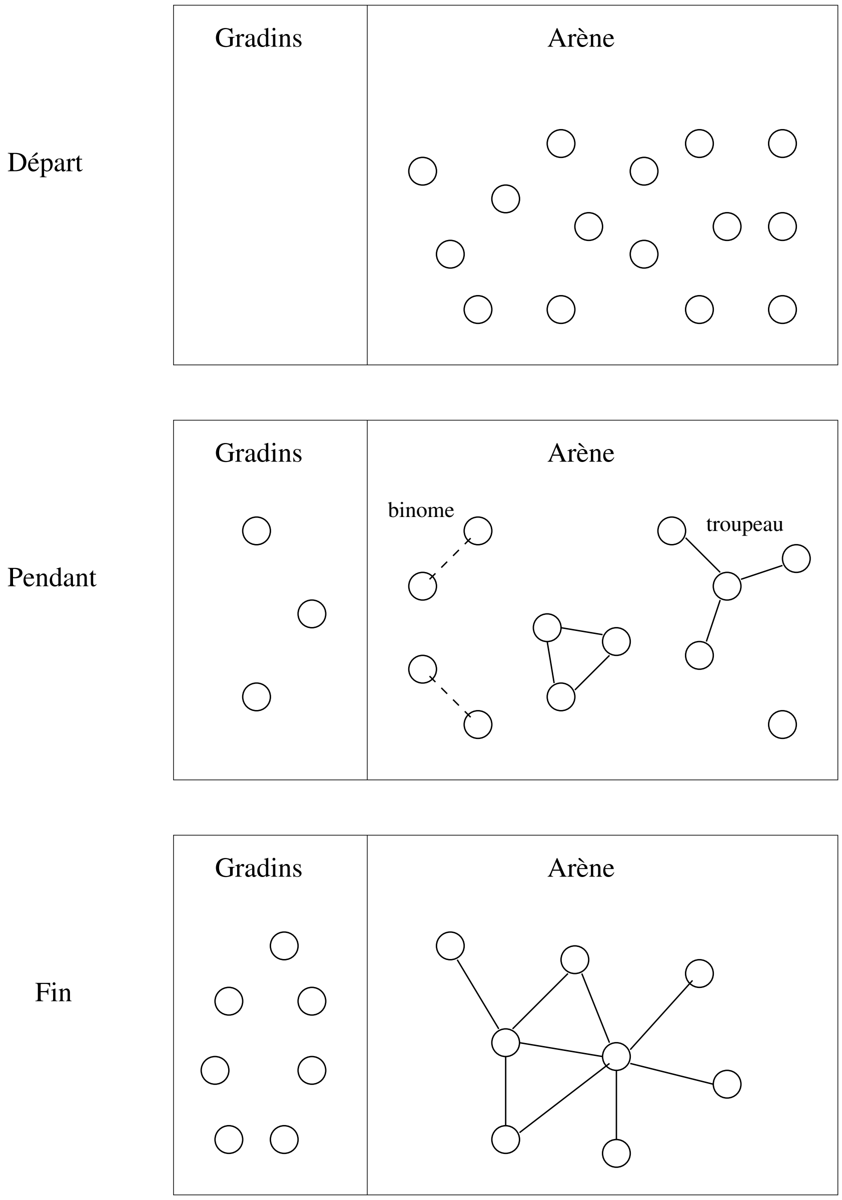
**Preuve par l'absurde :** supposons que l'arène contienne au moins deux composantes (ce qui implique $n \geq 2$ et $m \geq 2$). Par définition de $d$, chaque troupeau contient $< d$ balles. Chaque troupeau contient donc $< m$ balles, car soit $d = m$, soit $d > m$ et d'après la question 1 chaque troupeau est un singleton. La coloration $(i)$ n'a pas d'élément majoritaire, mais la coloration $(ii)$ a un élément majoritaire (car $d \geq m$). Donc aucun algorithme correct ne peut s'arrêter à cet instant.

**Conclusion :** à la fin, il y a nécessairement une unique composante, nécessairement de taille $d = m$ (par définition de $d$ et d'après la question 1 qui implique que $d \not> m$).

5.4 - A tout moment, on a eu jusqu'à présent :

- Nombre de *comparaisons inégales* $\geq 2g + B$, car il faut 2 comparaisons inégales pour mettre une balle dans les gradins (entrée dans un binôme puis sortie du binôme) et il y a $B$ comparaisons inégales qui ont construit les binômes en place.
- Nombre de *comparaisons égales* $\geq t - T$, car un troupeau $i$ avec $t_i$ balles est connexe donc il a $\geq t_i - 1$ arêtes, soit ici $t_i - 1$ comparaisons égales.

5.5 - En fin d'algorithme, d'après la question 3, $g = n - m$, $B = 0$, $t = m$ et $T = 1$. Donc, avec la question 4, il y a eu $\geq 2(n - m) = 2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2$ comparaisons inégales et $\geq m - 1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ comparaisons égales, soit au total $\geq \lceil \frac{3n}{2} \rceil$ comparaisons.


Départ
Gradins
Arène
Pendant
Gradins
Arène
binome
troupeau
Fin
Gradins
Arène

# Chapitre 3

# Programmation dynamique

## 3.1 Pièces de Monnaies

On dispose de pièces en nombre illimité, de valeurs 10, 5, 2 et 1. On veut arriver a une somme $S$ avec le minimum de pièces.

*Algorithme Glouton :* Trier les types de pièces par valeurs décroissantes. Pour chaque valeur de pièce, maximiser le nombre de pièces choisies. Plus formellement, soit $R$ la somme restante, initialisée à $S$. Pour chaque valeur $v_i$, prendre $c_i = \lfloor \frac{R}{v_i} \rfloor$ pièces, et poser $R \leftarrow R - c_i \cdot v_i$.

Pour prouver l'optimalité de l'algorithme glouton avec les valeurs 10, 5, 2 et 1 :
- Au plus une pièce de 5 (sinon une de 10)
- Au plus une pièce de 1 (sinon une de 2)
- Au plus deux pièces de 2 (sinon une de 5 et une de 1)
- Au plus quatre pièces qui ne sont pas des pièces de 10 ($1 * 5 + 2 * 2 + 1 = 1 * 10$), pour un total inférieur ou égal à 9
- Le nombre de pièces de 10 est donc $\lfloor \frac{S}{10} \rfloor$
- Conclure avec ce qui précède

Remarque : l'algorithme glouton n'est pas optimal pour le jeu de pièces de valeurs $(6, 4, 1)$ : pour $S = 8$, le glouton renvoie $8 = 6 + 1 + 1$ alors qu'on a $8 = 4 + 4$.

Dans le cas général, on cherche $m(S)$, le nombre minimum de pièces pour faire $S$ avec des pièces de valeur $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Pour cela on introduit la fonction $z$ telle que :
- $z(T, i)$ = nombre minimum de pièces choisies parmi les $i$ premières $(a_1, ..., a_i)$ pour faire $T$
- on remarque que $z(S, n) = m(S)$, on résout un problème apparemment plus compliqué que le problème de départ

Mais on a une relation de récurrence :

$$z(T, i) = \min \begin{cases} z(T, i-1) & i\text{-ème pièce non utilisée} \\ z(T - v_i, i) + 1 & \text{on a utilisé une fois (au moins) la } i\text{-ème pièce} \end{cases}$$

Il faut initialiser la récurrence correctement, par exemple en posant $z(T, i) = 0$ pour $T \leq 0$ ou $i = 0$.

Comment calculer toutes les $S \cdot n$ valeurs de $z$ dont on a besoin ? Un algorithme qui calcule par colonnes (boucle sur $i$ externe, boucle sur $T$ interne) permet de respecter les dépendances, i.e. de toujours avoir en membre droit des valeurs précédemment obtenues. On obtient une complexité en $O(n * S)$., alors que l'algorithme glouton avait une complexité en $O(n \log n)$ (l'exécution est linéaire, mais il faut auparavant trier les valeurs).

**Remarque** Caractériser les jeux de pièces pour lesquels l'algorithme glouton est optimal est un problème ouvert. Il est facile de trouver des catégories qui marchent (par exemple des pièces $1, B, B^2, B^3, \ldots$ pour $B \geq 2$) mais le cas général résiste !

## 3.2 Le problème du sac à dos

On se donne $n$ objets ayant pour valeurs $c_1, \ldots, c_n$ et pour poids (ou volume) $w_1, \ldots, w_n$. Le but est de remplir le sac à dos en maximisant $\sum_{i \in I} c_i$, sous la contrainte $\sum_{i \in I} w_i \leq W$, où $W$ est la contenance maximale du sac

### 3.2.1 En glouton

On va travailler sur le rapport "qualité/prix". On commence par trier les objets selon les $\frac{c_i}{w_i}$ décroissants, puis on gloutonne en remplissant le sac par le plus grand élément possible à chaque tour.

Question : Est-ce optimal ? Non.

Le problème qui se pose est que l'on travaille avec des éléments discrets non divisibles. Prenons un contre-exemple : si l'on considère 3 objets, le 1er ($c_i/w_i$ max) remplissant le sac à lui seul (aucun autre objet ne rentre) et les 2ème et 3ème tels que $c_1 > c_2$, $c_1 > c_3$, mais que $c_2 + c_3 > c_1$ et que les deux objets puissent rentrer ensemble dans le sac. Alors la solution donnée par glouton (remplissage par le premier objet) est sous-optimale, contrairement au remplissage par les objets 2 et 3.

$$(W = 10) \qquad (w_1 = 6; w_2 = 5; w_3 = 5) \qquad (c_1 = 7; c_2 = 5; c_3 = 5)$$

est un exemple d'un tel cas de figure.

### 3.2.2 Par programmation dynamique

Afin de résoudre le problème par une récurrence, on va le compliquer. Un problème de remplissage plus complexe que celui de départ est celui où la taille du sac et le nombre d'objets à employer sont arbitraires. Posons alors $C(v, i)$ comme l'expression du meilleur coût pour remplir un sac de taille $v$ avec les $i$ premiers objets. Résoudre le problème de remplissage du sac de taille $W$ avec les $n$ objets revient à donner $C(W, n)$.

La récurrence : soit on a pris le dernier objet, soit on ne l'a pas pris, d'où

$$C(v, i) = \max \begin{cases} C(v, i-1) & \text{dernier objet non considéré} \\ C(v - w_i, i-1) + c_i & \text{dernier objet pris} \end{cases}$$

La solution optimale des sous-problèmes va servir à retrouver la solution optimale du problème global, sans que l'on calcule jamais 2 fois la même valeur. Ceci implique par contre de respecter les dépendances du calcul.

**Remarque** Le coût de glouton est en $O(n \log n)$ (tri de $n$ nombres) tandis que le coût du traitement en programmation dynamique est en $O(nW)$

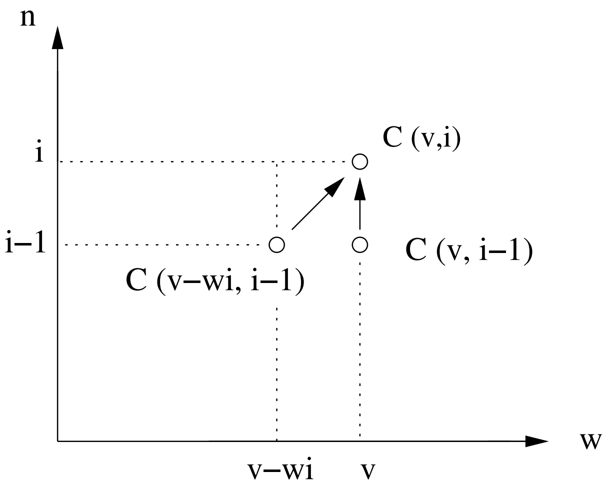



FIG. 3.1 – Attention au respect des dépendances !

## 3.3 Quelques exemples de programmation dynamique

Les exemples que nous allons voir ici concernent le traitement de chaînes de matrices d'une part, et la détermination de la plus longue sous-suite de deux chaînes de caractères d'autre part.

Credo du programmeur dynamique : "Demain est le premier jour du reste de ta vie."

### 3.3.1 Chaînes de matrices

Considérons $n$ matrices $A_i$, de taille $P_{i-1} \times P_i$ On veut calculer $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Le problème que l'on se pose est de trouver comment parenthéser cette expression, le parenthésage influant sur les calculs.

Le nombre de parenthèsages différents peut se calculer par récurrence. Soit $C_n$ le nombre de parenthésages. Si l'on place la dernière parenthèse en $k$, on obtient si $n \geq 2$ :

$$C(n) = \sum_{k=1}^{n-1} C(k) \cdot C(n_k)$$

On comprend intuitivement que le nombre de façons de parenthéser dépend de la façon dont les deux parties de l'expression ont été elles-mêmes parenthésées. La condition initiale est $C(1) = 1$. Knuth nous explique que l'on peut calculer $C(n)$ par l'intermédiaire des nombres de Catalan (obtenus par séries génératrices [1]). On a $C(n) = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1} = \Omega(4^n/n^{1.5})$. Cette quantité effarante nous fait bien vite déchanter, et l'on se résout à abandonner la stratégie de la force brute.

Pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué ? Tâchons de nous ramener à de la programmation dynamique (après tout c'est le titre de ce paragraphe). Nous cherchions à parenthéser $A_1, \ldots, A_n$, cherchons donc le coût optimal du parenthèsage de $A_i, \ldots, A_j$ (noté $C(i,j)$). La solution de notre problème s'obtiendra pour $i = 1$ et $j = n$.

La récurrence :

Supposons que la meilleure façon de couper $(A_i, \ldots, A_j)$ est de couper à un endroit $k$ :

$$\underbrace{(A_i \ldots A_k)}_{\text{coût optimal pour l'obtenir : } C(i,k)} \quad * \quad \overbrace{(A_{k+1} \ldots A_j)}^{\text{coût optimal pour l'obtenir : } C(k+1,j)}$$

[1]En cas de besoin urgent de compulser une référence sur les séries, se référer à Flajeolet et Sedgewick

Le coût total d'un parenthésage en $k$ est donc de

$$C(i,k) + C(k+1,j) + \text{ coût du produit des 2 membres } (P_{i-1} * P_k * P_j)$$

et le coût optimal s'obtient par

$$min_{k=i}^{j-1}\{C(i,k) + C(k+1,j) + (P_{i-1} * P_k * P_j)\}$$

Le calcul se fait en respectant les dépendances : le calcul de $C(i,j)$ demande tous les $C(i,k)$ et tous les $C(k+1,j)$

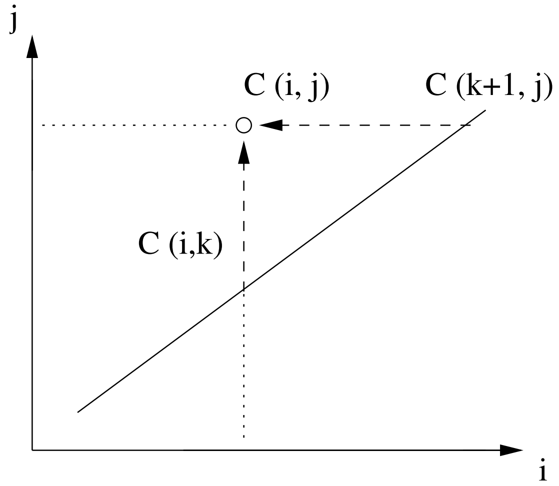



FIG. 3.2 – L'initialisation se fait sur $C(i,i+1) = P_{i-1} * P_i * P_{i+1}$ et $C(i,i) = 0$ sur la diagonale

L'algorithme réalisant le calcul en respectant les dépendances sera en $O(n^3)$ (for diag = ... for élément dans diag calcul for k = ...)

Question :
Cet algorithme peut-il s'écrire en récursif ? Oui.
Cela demande t-il plus de calcul ? Non, à condition de s'arrêter à l'entrée d'un calcul $C(i,j)$ déjà effectué. On initialise toutes les valeurs de $C(i,j)$ à $+\infty$, et on effectue un test à l'entrée de l'appel récursif.

### 3.3.2 Plus longue sous-suite

*Exemple :* Votre petit frère apprend l'anglais avec un logiciel qui demande "What is the capital of the USA ?". Il serait intéressant que le logiciel soit capable de différencier "New-York" de "Washington" mal écrit, pour donner une réponse appropriée (mauvaise réponse ou mauvaise orthographe).
On peut alors définir une mesure de *distance d'édition*, c'est à dire le nombre de transformations nécessaires pour passer d'une chaîne à une autre.
Soient

$$A = a_1...a_n \; B = b_1...b_m$$

On définit une sous-chaîne de $A$ comme étant $a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_k}$.
On recherche les sous-chaînes communes à $A$ et $B$, et plus particulièrement la Plus Longue Sous-Chaîne Commmune ou $PLSCC$.
*Exemple :*
$A = aabaababaa, \; B = ababaaabb$
alors $PLSCC = ababaa$, non consécutifs.

### Solution exhaustive

On essaie toutes les sous-suites : on énumère les $2^n$ sous-suites dans chaque chaîne, puis on les compare. Sans doute peu efficace.

### Programmation dynamique

On cherche la plus longue sous-chaîne commune entre les mots $A$ et $B$, de longueurs respectives $n$ et $m$. On recherche :

$$PLSCC(n,m) : \begin{cases} A[1 \dots n] \\ B[1 \dots m] \end{cases}$$

Pour cela, on utilise la plus longue sous-chaîne commune entre les $i$ et $j$ premières lettres de $A$ et $B$ respectivement, soit :

$$PLSCC(i,j) = p(i,j) : \begin{cases} A[1 \dots i] \\ B[1 \dots j] \end{cases}$$

On peut alors enclencher une récurrence pour résoudre le problème de la recherche de $p(i,j)$.

$$p(i,j) = max \begin{cases} p(i,j-1) \\ p(i-1,j) \\ p(i-1,j-1) + [a_i = b_j] \quad \text{avec } [a_i = b_j] \text{ vaut 1 si } a_i = b_j\text{, 0 sinon} \end{cases}$$

*Preuve*
On constate d'abord que :

$$max \begin{cases} p(i,j-1) \\ p(i-1,j) \\ p(i-1,j-1) + [a_i = b_j] \end{cases} \leq p(i,j)$$

Trivial en effet car $p(i,j)$ est croissant à valeurs entières en $i$ et en $j$.
On peut diviser la preuve de l'égalité en deux cas : soit (1) $p_i \neq p_j$, soit (2) $p_i = p_j$.

1. Si $p_i \neq p_j$, $p_i$ et $p_j$ ne peuvent pas appartenir tous deux à la même sous-suite commune : on a donc deux cas : soit $p_i$ appartient à la sous-suite et $p(i,j) = p(i,j-1)$, soit c'est $p_j$ qui y appartient, et on a $p(i,j) = p(i-1,j)$.
2. Si $p_i = p_j$, deux cas se présentent à nouveau : soit la PLSCC contient $p_i = p_j$, et alors $p(i,j) = p(i-1,j-1)+1$, soit elle ne contient pas $p_i = p_j$ et donc $p(i,j) = p(i-1,j-1)+0$.

On a donc prouvé la relation de récurrence.

*Exemple*
$A = a\ b\ c\ b\ d\ a\ b$
$B = b\ d\ c\ a\ b\ a$

La $PLSCC$ trouvée est $bdab$ : dans la Figure 3.3, on trouve une lettre commune lorsque les flèches sont diagonales. En effet, l'algorithme consiste à prendre l'option qui maximise le score, c'est à dire le maximum de la pente.

Le coût de la recherche de la plus longue sous-chaîne commune est de $O(nm)$. Il existe de meilleurs algorithmes dans la littérature, de deux types :

les algorithmes qui sont efficaces lorsque les séquences sont ressemblantes

les algorithmes qui sont efficaces lorsque les séquences sont très différentes.

On trouve alors des algorithmes en $O((n-r)m)$ ou en $O(rm)$, avec $r$ la longueur de la $PLSCC$ de deux mots de longueurs $n$ et $m$.

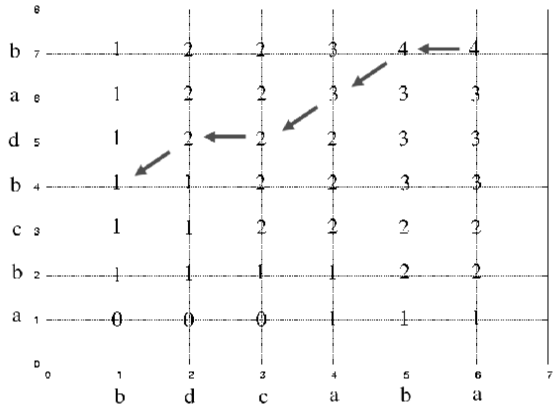


FIG. 3.3 – La $PLSCC$ est *bdab*.

### 3.3.3 Location de skis

Voici un exercice très joli, pour lequel il est conseillé de chercher la solution avant de lire la réponse !

**Allocation de skis aux skieurs** Spécifier un algorithme efficace pour une attribution optimale de $m$ paires de skis de longueur $s_1, \ldots, s_m$, respectivement, à $n$ skieurs ($m \geq n$) de taille $h_1, \ldots, h_n$, respectivement, via une fonction (injective) $f : \{1, \ldots, n\} \rightarrow \{1, \ldots, m\}$, $f$ étant optimale lorsqu'elle minimise $\sum_{k=1}^{n} |s_{f(k)} - h_k|$. On donne l'indication suivante : soit $A[n, m]$ ce minimum. Définir $A[i, j]$ pour des valeurs plus petites $i \leq n$ et $j \leq m$ (lesquelles ?), par une équation de récurrence ($i$ et $j$ font référence aux $i$ premiers skieurs et aux $j$ premières paires de skis, respectivement).

**Complexité** Analyser la complexité (en veillant à affiner l'analyse de sorte à garantir que l'algorithme soit en $O(n \log n)$ si $m = n$).

**Grand choix de skis** Montrer qu'on peut avoir une meilleure complexité lorsque $n^2 = o(m)$. (Indication : se restreindre à $O(n^2)$ paires de skis).

**Allocation de skis aux skieurs** On considère le même problème, mais en ne prenant que les $i$ premiers skieurs et les $j$ premières paires de skis (avec évidemment les mêmes longueurs et tailles). Pour écrire la récurrence définissant $A[i, j]$, on est naturellement amené à s'intéresser à la $j$-ème paire de skis et au $i$-ème skieur. Il y a deux cas. Si la solution optimale pour $i, j$ n'utilise pas la $j$-ème paire de skis, alors $A[i, j] = A[i, j - 1]$. Si la $j$-ème paire de skis est utilisée, il est tentant de l'affecter au $i$-ème joueur. On fait désormais l'hypothèse que les suites $s_1, \ldots, s_m$ et $h_1, \ldots, h_n$ sont rangées dans l'ordre croissant, ou plus précisément l'ont été dans une première phase de l'algorithme. On a la propriété suivante :

**Lemme 1. (P)** *Si* $f : \{1, \ldots, i\} \rightarrow \{1, \ldots, j\}$ *(injective) est telle qu'il existe* $i_1 \leq i$ *avec* $f(i_1) = j$*, alors* $\sum_{k=1}^{i} |s_{f(k)} - h_k| \geq \sum_{k=1}^{i} |s_{f'(k)} - h_k|$*, avec* $f'$ *obtenue à partir de* $f$ *en échangeant les images de* $i_1$ *et* $i$ *(donc* $f'(i_1) = f(i)$*,* $f'(i) = j$ *et* $f' = f$ *ailleurs).*

**Preuve**. Intuitivement, la propriété (P) dit que si on a une attribution avec deux paires de ski pour deux skieurs donnés, mieux vaut (plus exactement on ne perd rien à) attribuer la plus petite paire au plus petit skieur et la plus grande paire au plus grand skieur. On pose

$$j_1 = f(i) \quad A = |s_j - h_{i_1}| + |s_{j_i} - h_i| \quad B = |s_{j_1} - h_{i_1}| + |s_j - h_i| \ .$$

Il faut montrer $A - B \geq 0$. On examine les différentes positions relatives de $s_{j_1}, s_j, h_{i_1}$ et $h_i$.

$$\begin{aligned}
s_{j_1} \leq h_{i_1} \leq h_i \leq s_j : A - B &= (s_j - h_{i_1} + h_i - s_{j_1}) - (h_{i_1} - s_{j_1} + s_j - h_i) \\
&= 2(h_i - h_{i_1}) \geq 0 \\[1em]
s_{j_1} \leq h_{i_1} \leq s_j \leq h_i : A - B &= (s_j - h_{i_1} + h_i - s_{j_1}) - (h_{i_1} - s_{j_1} - s_j + h_i) \\
&= 2(s_j - h_{i_1}) \geq 0 \\[1em]
s_{j_1} \leq s_j \leq h_{i_1} \leq h_i : A - B &= (h_{i_1} - s_j + h_i - s_{j_1}) - (h_{i_1} - s_{j_1} + h_i - s_j) \\
&= 0
\end{aligned}$$

(On a omis les cas $h_{i_1} \leq s_{j_1} \leq h_i \leq s_j$ et $h_{i_1} \leq h_i \leq s_{j_1} \leq s_j$ qui sont similaires.) □

Par la propriété (P), on peut supposer que le $i$-ème skieur se voit attribuer la $j$-ème paire de skis. En effet, si ce n'est pas le cas pour $f$, alors $f'$ tel que défini plus haut est meilleure que $f$, donc est optimale aussi, et attribue la $j$-ème paire de skis au $i$-ème skieur. Et on a $A[i,j] = A[i-1, j-1] + |s_j - h_i|$. Au total, on a prouvé :

$$A[i,j] = \min(A[i, j-1], (A[i-1, j-1] + |s_j - h_i|)) \ .$$

L'algorithme consiste donc à calculer ces $A[i,j]$, et si l'on veut calculer l'attribution $f$ en même temps, on note $f(i) = j$ au passage si on est dans le deuxième cas.

**Complexité** Combien d'entrées $A[i,j]$ faut-il calculer ? Il est facile de voir que les appels récursifs depuis $A[n,m]$ laissent de côté les deux triangles gauche inférieur et droite supérieur de la matrice $(n,m)$ qui ensemble ont une dimension $(n,n)$. Donc, ce ne sont pas $nm$, mais $(m-n)n$ entrées qui sont à calculer. Si l'on compte le temps du tri des deux suites, on arrive donc à une complexité

$$O((m \log m) + (n \log n) + (m-n)n) \ .$$

Ceci est satisfaisant dans le cas particulier où $m = n$ : on obtient alors $O(m \log m)$, et en effet, si $m = n$, il suffit de trier les deux suites et de poser $f = id$ (ce qui se voit par récurrence en utilisant la propriété (P)). (Noter que la complexité mal affinée $O(m \log m) + O(n \log n) + mn$ aurait donné $O(n^2)$.)

**Grand choix de skis** On remarque que si les listes sont triées, on peut se contenter, pour chaque skieur, de trouver la meilleure paire de skis et les $n-1$ meilleures paires de skis après la meilleure, de part et d'autre de la meilleure longueur. Cette fenêtre $S_i$ de taille $2n-1$ permet de prévoir les conflits avec les autres skieurs. Plus précisément, les paires de skis ainsi déterminées représentent un ensemble $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ de $n(2n-1)$ paires de skis avec de possibles répétitions tel que l'on peut définir une injection $f : \{1, \ldots, n\} \to S$ avec $f(i) \in S_i$ pour tout $i$ (choisir successivement une paire de skis différente pour chaque skieur, la marge de manoeuvre laissée d'au moins $n-1$ autres paires de skis pour chaque skieur garantit que c'est possible). On peut donc appliquer l'étude du début à $n$ et à cet ensemble $S$ dont le cardinal est au plus $n(2n-1)$. Le temps pris pour déterminer le sous-ensemble $S$ est $O(n((\log m) + n))$ : le premier $n$ correspond à la recherche des $S_i$ successifs, $\log m$ est le temps pour déterminer la meilleure paire de skis (par dichotomie dans la liste triée des $s_i$), et le dernier $n$ correspond à la taille de la fenêtre autour de la meilleure hauteur.

Il reste à voir qu'une solution optimale pour ce sous-ensemble de paires de skis est optimale pour l'ensemble de toutes les paires de skis. On remarque que pour tout $j \notin S$, on a par construction que pour tout $i$ il existe au moins $n$ éléments $s_{j_1}, \ldots, s_{j_n}$ de $S_i$ tels que $|s_j - h_i| \geq$

$|s_{j_k} - h_i|$ $(1 \leq k \leq n)$. (Noter ici l'importance d'avoir pris des paires *de part et d'autre* de la meilleure paire de skis.) Si donc il existait une fonction d'attribution optimale qui atteint $j$ (ainsi possiblement que d'autres valeurs hors de $S$), on pourrait remplacer sans conflit (cf. ci-dessus) ces valeurs par des valeurs de $S$, et donc obtenir une autre fonction optimale à valeurs dans $S$.

La complexité relative à $n$ et $S$ s'exprime comme suit (en y incorporant le temps de recherche des éléments de $S$) :

$$O(n^2 \log n) + O(n \log n) + O((n^2 - n)n) + O(n((\log m) + n)) = O(n^3 + n \log m) .$$

Ce temps est meilleur que le temps obtenu en (A2) si $n^2 = o(m)$, car alors $O(n^3 + n \log m) = o((m \log m) + (n \log n) + (m - n)n)$. En effet, $(n \log m)/(m \log m)$ et $n^3/(m-n)n$ tendent vers 0 (noter qu'on a fortiori $n = o(m)$).

## 3.4 Exercices

**Exercice 3.4.1.** *Triangulation de polygones*

On considère les polygones convexes du plan. Une triangulation d'un polygone est un ensemble de cordes qui ne se coupent pas à l'intérieur du polygone et qui le divisent en triangles.

1 - Montrer qu'une triangulation d'un polygone à $n$ côtés a $(n-3)$ cordes et $(n-2)$ triangles.

2 - Le problème est celui de la triangulation optimale de polygones. On part d'un polygone convexe $P = \langle v_0, ..., v_n \rangle$, où $v_0, \ldots, v_n$ sont les sommets du polygone donnés dans l'ordre direct, définie sur les triangles formés par les côtés et les cordes de $P$ (par exemple $w(i,j,k) = \|v_i v_j\| + \|v_j v_k\| + \|v_k v_i\|$ est le périmètre du triangle $v_i v_j v_k$). Le problème est de trouver une triangulation qui minimise la somme des poids des triangles de la triangulation.

On définit pour $1 \leq i < j \leq n$, $t[i,j]$ comme la pondération d'une triangulation optimale du polygone $\langle v_{i-1}, ..., v_j \rangle$, avec $t[i,i] = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Définir $t$ récursivement, en déduire un algorithme et sa complexité.

3 - Si la fonction de poids est quelconque, combien faut-il de valeurs pour la définir sur tout triangle du polygone ? Comparez avec la complexité obtenue.

4 - Si le poids d'un triangle est égal à son aire, que pensez-vous de l'algorithme que vous avez proposé ?

**Correction.**

1- On procède par récurrence sur $n \geq 3$.
**Pour** $n = 3$, le polygône est un triangle, qui a bien $n - 2 = 1$ triangle et $n - 3 = 0$ corde.
**Soit** $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. On suppose le résultat démontré pour tout polygône convexe possédant un nombre de côtés strictement inférieur à $n$. Soit alors un polygône à $n$ côtés et une triangulation de ce polygône. Considérons une corde qui divise ce polygône en deux polygônes, respectivement à $(i+1)$ et $(j+1)$ côtés avec $i + j = n, i \geq 2, j \geq 2$ (comme le montre la figure 3.4).

Par hypothèse de récurrence, on a $(i-2)$ cordes dans le premier polygône et $j - 2$ dans le second, ce qui fait pour le polygône entier $(i-2) + (j-2) + 1 = n - 3$ cordes en tout (le $+1$ représente la corde qui séparait le polygône en deux).

De même, on obtient un total de $(i-1) + (j-1) = n - 2$ triangles dans le polygône en tout, ce qui achève la démonstration.

2- Pour trouver une formule de récurrence sur $t$, il suffit de s'aperçevoir que le $v_{i-1}v_j$ fait partie d'un triangle dont le troisième sommet est $v_k$. On en déduit la formule : $t[i,j] =$

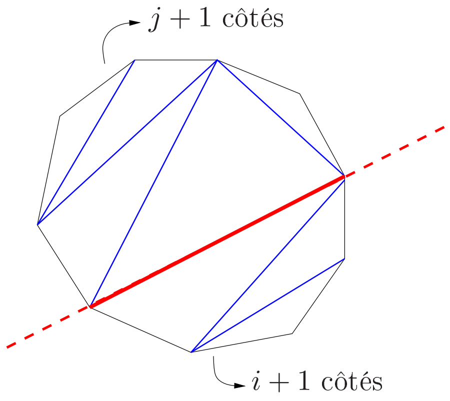



FIG. 3.4 – Une corde (en bleu) qui divise un polygone en deux

$min_{i \leq k \leq j-1}(t[i,k]+t[k+1,j]+w(i-1,k,j))$ (*On remarque que la convention* $t[i,i]$ *est bien adaptée puisque la formule ci-dessus reste vraie quand* $j = i+1$ *: on a bien* $t[i,i+1] = w(i-1,i,i+1)$.).

Nous pouvons maintenant écrire un algorithme qui calcule $t[1,n]$, et ce à partir des $t[k,j], i+1 \leq k \leq j$ et des $t[i,k], i \leq k \leq j-1$, c'est à dire, si l'on représente les valeurs à calculer dans un diagramme $(i,j)$ comme celui donné dans la figure 3.5, à partir des valeurs situées "en-dessous" et "à droite" du point $(1,n)$. On s'aperçoit alors qu'il suffit de calculer les $t[i,j]$ pour $i$ de 1 à $n$ et pour $j \geq i$, et ce par $(j-i)$ croissant.

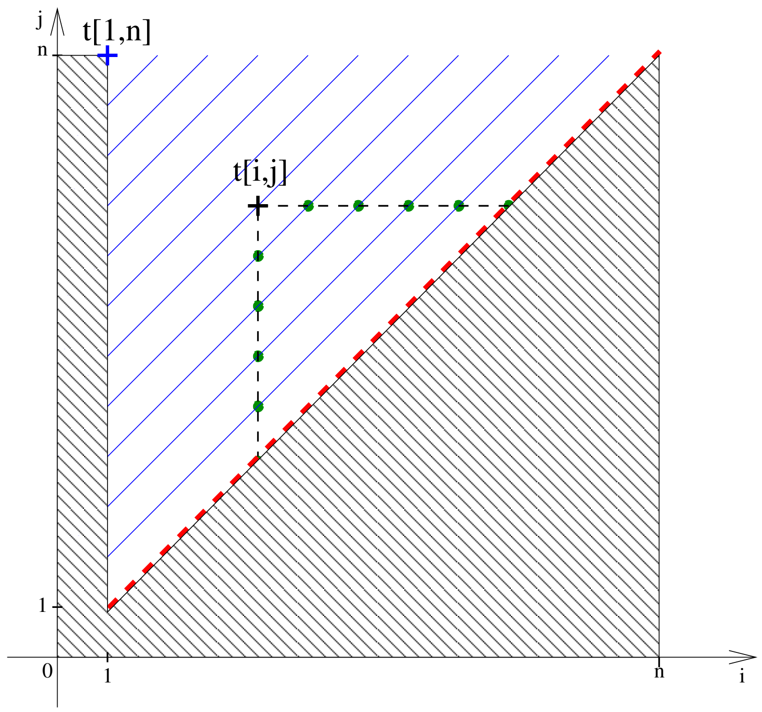



FIG. 3.5 – Diagramme $(i,j)$ des valeurs à calculer par l'algorithme de résolution

Ceci donne l'algorithme :
**début**

  **pour** $i$ ***de*** $0$ ***à*** $n$ **faire**
    $t[i,i] \leftarrow 0$
  **pour** $d$ ***de*** $1$ ***à*** $n-1$ **faire**
    **pour** $i$ ***de*** $1$ ***à*** $n-d$ **faire**
      $t[i,i+d] \leftarrow min_{i \leq k \leq j-1}(t[i,k] + t[k+1,j] + w(i-1,k,j))$
  Retourner $t[1,n]$

**fin**

Cet algorithme calcule $t[i,j]$ en $2(j-i)$ additions et en $j-i-1$ comparaisons pour calculer le min.

Le nombre total d'additions est donc : $A_n = \sum_{d=1}^{n-1}((n-d)\cdot(2d))$ où $(n-d)$ correspond au nombre de $t[i,j]$ à calculer sur la diagonale $j-i=d$ et $2d$ au nombre d'additions dans le calcul de chaque $t[i,j]$ où $j-i=d$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} A_n &= 2n \cdot \sum_{d=1}^{n-1} d - 2\sum_{d=1}^{n-1} d^2 \\ &= 2n \cdot \frac{n\cdot(n-1)}{2} - 2\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6} \\ &= \frac{(n-1)\cdot n \cdot (n+1)}{3} \\ &\sim n^3/3 = \Theta(n^3) \end{aligned}$$

Pour calculer le nombre $T_n$ de tests à effectuer, il suffit de remarquer qu'on fait deux fois moins de tests que d'additions dans le calcul du minimum, ce qui nous donne $T_n = A_n/2 - C_n$ où $C_n$ représente le nombre total de $t[i,j]$ calculés (ie le nombre d'affectations) On en déduit :

$$\begin{aligned} T_n &= A_n/2 - \sum_{d=1}^{n-1}(n-p) \\ &= \Theta(n^3) \end{aligned}$$

La complexité globale de l'algorithme est donc en $\Theta(n^3)$.

3- Dans le cas général, il faut autant de valeurs pour définir la fonction $w$ qu'il n'y a de triangles possibles, soit $C_{n+1}^3 = \Theta(n^3)$. Comme il faudra bien lire chacune de ces valeurs pour construire une triangulation optimale, n'importe quel algorithme doit fonctionner en une complexité d'au moins $\Theta(n^3)$. Notre algorithme est donc optimal en complexité du point de vue de l'ordre de grandeur.

4- Dans le cas où le poids d'un triangle est égal à son aire, toutes les triangulations donnent le même poids qui est l'aire du polygône. L'algorithme précédent est donc inadapté, et on peut à la place procéder par exemple comme suit :

*Algorithme*

- Prendre une triangulation quelconque (par exemple avec les cordes $(v_0v_i)_{2\leq i\leq n-1}$).
- Faire la somme des poids des triangles.

Cet algorithme n'effectue aucun test et $n-3$ additions (bien en dessous du $\Theta(n^3)$ !).

**Exercice 3.4.2.** *Jeu de construction*

On veut construire une tour la plus haute possible à partir de différentes briques. On dispose de $n$ types de briques et d'un nombre illimité de briques de chaque type. Chaque brique de type $i$ est un parallélépipède de taille $(x_i, y_i, z_i)$ et peut être orientée dans tous les sens, deux dimensions formant la base et la troisième dimension formant la hauteur.

Dans la construction de la tour, une brique ne peut être placée au dessus d'une autre que si les deux dimensions de la base de la brique du dessus sont *strictement inférieures* aux dimensions de la base de la brique du dessous.

Proposer un algorithme efficace pour construire une tour de hauteur maximale.

**Correction.**

Si on prend un parallélépipède quelconque $(x_i,\ y_i,\ z_i)$, on s'aperçoit qu'on peut le poser sur la tour de 6 manières différentes.

On peut commencer par remarquer que si on peut poser une brique sur une autre de façon à ce que la longueur de la 1re brique soit parallèle à la largeur de la 2e, alors on peut aussi poser la 1re brique sur la 2e de façon à ce que les largeurs (et donc aussi les longueurs) des deux briques soient parallèles (comme le montre la figure 3.6). On peut donc faire l'hypothèse que les briques seront posées les unes sur les autres de telle sorte que les largeurs des briques soient toutes parallèles entre elles. (*Le nombre de configurations par parallélépipède est ainsi réduit à 3.*)

Remarquons ensuite qu'un même parallélépipède ne peut être utilisé au plus que deux fois (dans deux configurations différentes). En effet, considérons le parallélépipède $(x_i, y_i, z_i)$ avec $x_i \leq y_i \leq z_i$ : si on la pose une première fois, alors, dans le meilleur des cas, on peut encore poser sur la tour toutes briques $(x_j, y_j, z_j)$ telles que $x_j < y_i$ et $y_j < z_i$ (en supposant que $x_j \leq y_j \leq z_j$). Ainsi, si les inégalités sont strictes pour $x_i$, $y_i$, et $z_i$, on peut encore poser le parallélépipède. Pour le poser une troisième fois, il faudrait qu'il posséde un côté de longueur strictement inférieure à $x_i$. Ce n'est pas le cas, est donc on ne peut le poser que deux fois. Cela a pour conséquence que la tour de hauteur maximale sera composée d'au plus $2n$ parallélépipèdes.

Dorénavant, nous allons considérer les briques $(L_i, l_i, h_i)$ avec $L_i \geq l_i$. Nous devons alors considérer $3n$ briques au lieu de $n$ parallélépipèdes, mais il ne reste plus qu'une configuration possible par brique ( *Si le parallélépipède est $(x_i, y_i, z_i)$ avec $x_i < y_i < z_i$, les 3 briques associées sont $(z_i, y_i, x_i)$, $(z_i, x_i, y_i)$ et $(y_i, x_i, z_i)$.*).

Ainsi, on peut poser la brique $(L_i, l_i, h_i)$ sur la brique $(L_j, l_j, h_j)$ si et seulement si $\begin{cases} L_i < L_j \\ l_i < l_j \end{cases}$

On pose $\forall i \in \{1, \ldots, 3n\}, H_i =$ hauteur maximale parmi les tours se terminant par la $i^{\text{e}}$

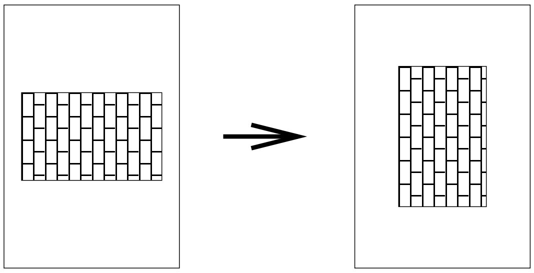


FIG. 3.6 – Si une brique posée sa largeur parallèle à la longueur de celle en dessous, alors elle peut être posée de telle sorte que leurs longueurs sont parallèles

brique. On a la relation de récurrence suivante :

$$\forall i \in \{1, \ldots, 3n\}, H_i = h_i + Max_{1 \leq j \leq 3n}(H_j / L_j > L_i \text{ et } l_j > l_i) \tag{3.1}$$

L'idée est de commencer par trier les $3n$ briques par $(L_i,\ l_i)$ décroissant. Celà se fait en $O(nlog(n))$ comparaisons. L'équation précédente peut alors se réécrire :

$$\forall i \in \{1, \ldots, 3n\}, H_i = h_i + Max_{1 \leq j < i}(H_j / L_j > L_i \text{ et } l_j > l_i) \tag{3.2}$$

On calcule ainsi chaque $H_i$ pour $i$ allant de 2 à $3n$ en partant de $H_1 = h_1$. Le calcul de $H_i$ nécessite 1 addition et $3i - 3$ comparaions dans le pire des cas. Le calcul de tous les $H_i, i \in 1, \ldots, 3n$ est donc linéaire en addition et quadratique en comparaison.

Enfin, il faut calculer $H = Max_{1 \leq i \leq 3n}(H_i)$ qui est la solution de notre problème, ce qui coûte $3n - 1$ comparaisons. La complexité totale est par conséquent en $O(n^2)$ pour les comparasions et en $O(n)$ pour les additions et l'algorithme est le suivant :

**début**
  liste ← []
  **pour** $i$ ***de*** 1 ***à*** $n$ **faire**
    Ajouter les 3 configurations possibles du parallélépipède $(x_i,\ y_i,\ z_i)$ à *liste*
  Trier *liste* $= (L_i, l_i, h_i)_{i \in \{1,\ldots,3n\}}$ par $(L_i, l_i)$ décroissant.
  $H_1 \leftarrow h_1$
  **pour** $i$ ***de*** 2 ***à*** $3n$ **faire**
    $H_i \leftarrow h_i + Max_{1 \leq j < i}(H_j / L_j > L_i \text{ et } l_j > l_i)$
  $H \leftarrow Max_{1 \leq i \leq 3n}(H_i)$
  Renvoyer H
**fin**

### Exercice 3.4.3. *Plus grand carré de 1*

Donner un algorithme de programmation dynamique pour résoudre le problème suivant :
**Entrée :** une matrice $A$ de taille $n \times m$ où les coefficients valent 0 ou 1.

**Sortie :** la largeur maximum $K$ d'un carré de 1 dans $A$, ainsi que les coordonnées $(I, J)$ du coin en haut à gauche d'un tel carré (autrement dit pour tout $i, j$, $I \leq i \leq I + K - 1$, $J \leq j \leq J + K - 1$, $A[i, j] = 1$).
Quelle est sa complexité ?
*Indication :* considérer $t[i, j]$ la largeur du plus grand carré de 1 ayant $(i, j)$ pour coin en haut à gauche.

| $A$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 7 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |

FIG. 3.7 – Exemple où la largeur max. d'un carré de 1 vaut 4 ((2, 3) est le coin en haut à gauche).

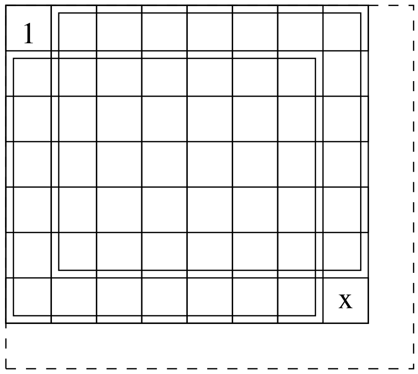



FIG. 3.8 – schéma des carrés à prendre en compte pour le calcul de $t[i,j]$

**Correction.**

On considère la matrice $A$ de taille $n \times m$ dont les coeficients valent 0 ou 1, et on note $C_{i,j}$ le plus grand carré ayant l'élément $A_{i,j}$ comme coin supérieur gauche, et $t[i,j]$ sa largeur. On peut alors établir la relation de récurrence suivante :

$$\forall i,j < n,m \quad \begin{cases} \text{si } A_{i,j} = 0, & t[i,j] = 0 \\ \text{sinon,} & t[i,j] = \min(t[i,j+1], t[i+1,j], t[i+1,j+1]) + 1 \end{cases}$$

En effet, le premier cas se vérifie de manière triviale, et l'on peut vérifier le second cas, en remarquant déjà que l'on a $t[i+1,j+1] \geq \max(t[i,j+1], t[i+1,j]) - 1$. Ensuite, si l'on pose $l = t[i,j+1]$ et que l'on a $l < t[i+1,j] \leq t[i+1,j+1] - 1$, alors $A_{i,j+l+1} = 0$ et donc $t[i,j] \leq l+1$. D'où, le carré de coin supérieur gauche $A_{i,j}$ et de côté $l+1$ est inclu dans l'ensemble $C_{i,j+1} \cup C_{i+1,j} \cup \{A_{i,j}\}$, il est donc entièrement constitué d'éléments valant 1. On procede de la même manière si $t[i+1,j] < t[i,j+1]$, ce qui permet de vérifier la formule donnée précédemment. Dans le cas où $t[i+1,j] = t[i,j+1] = l$, on a $t[i,j] = l+1$ si $A_{i+l,j+l} = 1$ (et dans ce cas $t[i+1,j+1] \geq l$) mais sinon, on a $t[i,j] = l-1$ (et dans ce cas $t[i+1,j+1] = l-1$). On retrouve bien notre formule. Tout ceci nous fournit l'algorithme suivant :

`/* initialisation des bords de la matrices */`
**pour** $i$ **de** 1 **à** $n$ **faire** $t[i,m] \leftarrow A_{i,m}$
**pour** $j$ **de** 1 **à** $m$ **faire** $t[n,j] \leftarrow A_{n,j}$

`/* calcul des t[i,j] dans le bon ordre */`
**pour** $i$ **de** $n-1$ **à** 1 **faire**
  ▶ **pour** $j$ **de** $m-1$ **à** 1 **faire**
    ▶ **si** $A_{i,j} = 0$ **alors faire** $t[i,j] \leftarrow 0$
     **sinon faire** $t[i,j] \leftarrow \min(t[i,j+1], t[i+1,j], t[i+1,j+1]) + 1$
**retourner** $\max_{i,j} t[i,j]$

## Exercice 3.4.4. *Arbres binaires de recherche optimaux*

Un *arbre binaire de recherche* est une structure de données permettant de stocker un ensemble de clés ordonnées $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, pour ensuite effectuer des opérations du type *rechercher*, *insérer* ou *supprimer* une clé. Il est défini par les propriétés suivantes :

($i$) C'est un arbre où chaque nœud a 0, 1 ou 2 fils, et où chaque nœud stocke une des clés.

$(ii)$ Etant donné un nœud avec sa clé $x$, alors les clés de son sous-arbre gauche sont strictement inférieures à $x$ et celles de son sous-arbre droit sont strictement supérieures à $x$.

La figure 3.9 représente un arbre binaire de recherche pour les clés $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < x_7 < x_8 < x_9$.

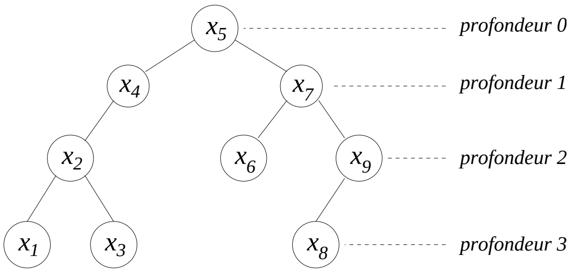



Fig. 3.9 – Exemple d'arbre binaire de recherche.

Les requêtes auxquelles on s'intéresse ici sont les *recherches* de clés. Le coût de la recherche d'une clé $x$ correspond au nombre de tests effectués pour la retrouver dans l'arbre en partant de la racine, soit exactement la profondeur de $x$ dans l'arbre, plus 1 (la racine est de profondeur 0).

Pour une séquence fixée de recherches, on peut se demander quel est l'arbre binaire de recherche qui minimise la somme des coûts de ces recherches. Un tel arbre est appelé *arbre binaire de recherche optimal* pour cette séquence.

1 - Pour un arbre binaire de recherche fixé, le coût de la séquence ne dépend clairement que du nombre de recherches pour chaque clé, et pas de leur ordre. Pour $n = 4$ et $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, supposons que l'on veuille accèder une fois à $x_1$, 9 fois à $x_2$, 5 fois à $x_3$ et 6 fois à $x_4$. Trouver un arbre binaire de recherche optimal pour cet ensemble de requêtes.

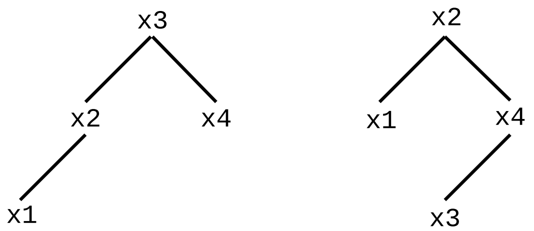
2 - Donner un algorithme en temps $\mathcal{O}(n^3)$ pour construire un arbre binaire de recherche optimal pour une séquence dont les nombres d'accès aux clés sont $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ($c_i$ est le nombre de fois que $x_i$ est recherché). Justifier sa correction et sa complexité.

*Indication :* pour $i \leq j$, considérer $t[i, j]$ le coût d'un arbre de recherche optimal pour les clés $x_i < ... < x_j$ accédées respectivement $c_i, \ldots, c_j$ fois.

**Correction.**

1 - Arbres binaires optimaux

il suffit de dessiner l'ensemble des graphes possibles (il y en a 14) pour trouver les deux graphes minimaux.



2 - Algorithme

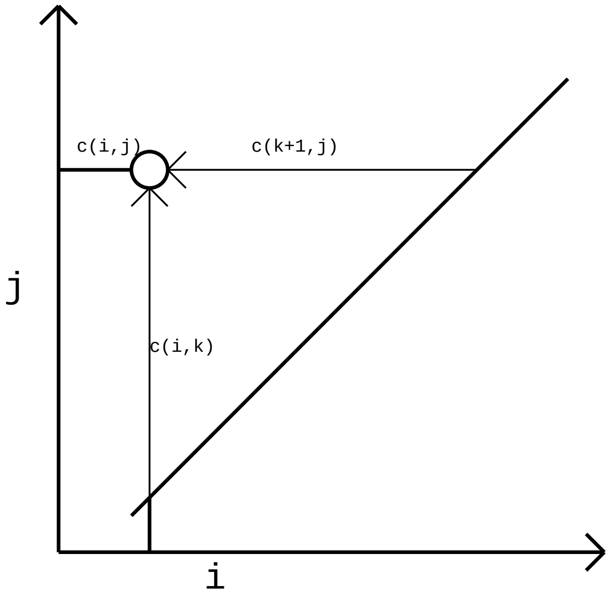
Le poids d'un arbre est le poid de ses fils, plus le poids de sa racine, plus le poids de tous les noeuds de ses fils (on leur rajoute un niveau). On appelle $t[i,j]$ le poid de l'arbre, de poids minimum contenant les sommets de i à j, et $C_k$ le poid du sommet p. donc :

$$t[i,j] = min_{i \leq k \leq j}(t[i,k-1] + C_k + t[k+1,j] + \sum_{p=i}^{k-1}(C_p) + \sum_{p=k+1}^{j}(C_p))$$

soit :

$$t[i,j] = min_{i \leq k \leq j}(t[i,k-1] + t[k+1,j]) + \sum_{p=i}^{j}(C_p)$$

On initialise l'algo avec $t[i,i-1] = 0$.




la complexité est en $O(n^3)$ : une boucle sur les i une autre sur les j puis une dernière sur les k.

### Exercice 3.4.5. *Impression équilibrée*

Le problème est l'impression équilibrée d'un paragraphe sur une imprimante. Le texte d'entrée est une séquence de $n$ mots de longueurs $l_1$,$l_2$,...,$l_n$ (mesurées en caractères). On souhaite imprimer ce paragraphe de manière équilibrée sur un certain nombre de lignes qui contiennent un maximum de $M$ caractères chacune. Le critère d'*équilibre* est le suivant.

Si une ligne donnée contient les mots $i$ à $j$ (avec $i \leq j$) et qu'on laisse exactement un espace entre deux mots, le nombre de caractères d'espacement supplémentaires à la fin de la ligne est $M - j + i - \sum_{k=i}^{j} l_k$, qui doit être positif ou nul pour que les mots tiennent sur la ligne. L'objectif est de minimiser la somme, sur toutes les lignes *hormis la dernière*, des cubes des nombres de caractères d'espacement présents à la fin de chaque ligne.

1 - Est-ce que l'algorithme glouton consistant à remplir les lignes une à une en mettant à chaque fois le maximum de mots possibles sur la ligne en cours, fournit l'optimum ?

2 - Donner un algorithme de programmation dynamique résolvant le problème. Analyser sa complexité en temps et en espace.

3 - Supposons que pour la fonction de coût à minimiser, on ait simplement choisi la somme des nombres de caractères d'espacement présents à la fin de chaque ligne. Est-ce que l'on peut faire mieux en complexité que pour la question 2 ?

4 - (*Plus informel*) Qu'est-ce qui à votre avis peut justifier le choix de prendre les cubes plutôt que simplement les nombres de caractères d'espacement en fin de ligne ?

**Correction.**

À faire.

# Chapitre 4

# Algorithmes gloutons

## 4.1 Exemple du gymnase

*Problème*
On considère un gymnase dans lequel se déroulent de nombreuses épreuves : on souhaite en “caser” le plus possible, sachant que deux événements ne peuvent avoir lieu en même temps (il n’y a qu’un gymnase). Un événement $i$ est caractérisé par une date de début $d_i$ et une date de fin $f_i$. On dit que deux événements sont compatibles si leurs intervalles de temps sont disjoints. On veut résoudre le problème à l’aide d’un programme glouton.

*Essai 1*
On trie les événements par durée puis on gloutonne, *i.e.* on met les plus courts en premier s’ils sont compatibles avec ceux déjà placés.
Ceci n’est pas optimal comme le montre l’exemple de la Figure 4.1.

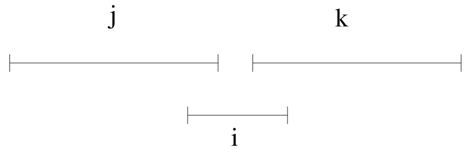



Fig. 4.1 – L’essai 1 ne conduit pas à l’optimal.

On constate que l’événement $i$, plus court que $k$ et $j$, est placé avant ceux-ci et les empêche d’être choisis : on obtient alors une situation non optimale où seul un événement a eu lieu alors que deux événements étaient compatibles l’un avec l’autre.

*Essai 2*
Plutôt que de trier par durée les événements, on peut les classer par date de commencement. Encore une fois, cet algorithme n’est pas optimal, comme le montre l’exemple de la Figure 4.2

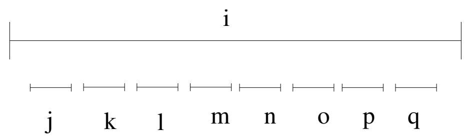



Fig. 4.2 – L’essai 2 ne conduit pas à l’optimal.

On constate que l'événement $i$, le premier à démarrer, empêche toute une multitude d'événements d'avoir lieu : le second essai est loin d'être optimal.

*Essai 3*
On peut enfin trier les événements par date de fin croissante.

**Théorème 4.** *Cet algorithme glouton est optimal.*

**Preuve**. Soit $f_1$ l'élément finissant le plus tôt. On va montrer qu'il existe une solution optimale contenant cet événement. Soit donc une solution optimale arbitraire O,

$$O = \{f_{i_1}, f_{i_2}, ..., f_{i_k}\}$$

avec $k$ le maximum d'événements pouvant avoir lieu dans le gymnase. Il y a deux possibilités : soit $f_{i_1} = f_1$ soit $f_{i_1} \neq f_1$. Dans ce dernier cas, alors on remplace $f_{i_1}$ par $f_1$. Comme $f_1$ finit avant tout autre événement, alors comme $f_{i_2}$ n'intersectait pas avec $f_{i_1}$, $f_{i_2}$ n'intersecte pas avec $f_1$. On peut donc bien trouver une solution optimale ayant comme premier événement l'événement finissant en premier, la classe des solutions ayant $f_1$ en premier "domine".
Ensuite, après avoir placé $f_1$, on ne considère que les événements n'intersectant pas avec $f_1$, et on réitère la procédure sur les événements restants, d'où la preuve par récurrence. □

## 4.2 Coloriage d'un graphe

Soit un graphe $G = (V, E)$ (en anglais vertex=sommet et edge=arête). On veut colorier les sommets, mais deux sommets reliés par une arête ne doivent pas avoir la même couleur : formellement, on définit la coloration $c : V \to \{1..K\}$ telle que $(x, y) \in E \Rightarrow c(x) \neq c(y)$. Le but est de minimiser $K$, le nombre de couleurs utilisé

**Théorème 5.** *Un graphe est* 2*-coloriable ssi ses cycles sont de longueur paire.*

**Preuve**. $\Longrightarrow$ Supposons que G contienne un cycle de longueur impaire $2k + 1$, et que, par l'absurde, il soit 2-coloriable. Pour les sommets du cycle, si 1 est bleu, alors 2 est rouge et par récurrence les impairs sont bleus et les pairs rouges ; mais 1 est à côté de $2k + 1$. Contradiction.

$\Longleftarrow$ Supposons que tous les cycles de G soient de longueur paire. On suppose que $G$ est connexe (le problème est indépendant d'une composante connexe à l'autre). On parcourt $G$ en largeur.

Soit $x_0 \in G$, $X_0 = \{x_0\}$ et $X_{n+1} = \bigcup_{y \in X_n} \{\text{fils de y dans l'ordre de parcours}\}$.
Si par l'absurde $\exists k \exists m \exists z \in X_{2k} \cap X_{2m+1}$, alors $z$ est à distance $2k$ de $x_0$ et $2m + 1$ de $x_0$. Le cycle correspondant contient$(2k - 1) + (2m) + 2 = 2(m + k) + 1$ éléments. Contradiction.
Donc $\forall k \forall m X_{2k} \cap X_{2m+1} = \emptyset$ ; on colorie en bleu les éléments des $X_i$ avec i impair et en rouge les éléments des $X_i$ avec i pair.
Il ne peut y avoir deux éléments reliés appartenant à $X_i$,$X_j$ avec $i$ et $j$ de même parité car sinon ils formeraient en remontant à $x_0$ un cycle de longueur $i + j + 1$ (impaire).
On a donc 2-colorié G. □

On appelle *biparti* un graphe 2-coloriable : les sommets sont partitionnés en deux ensembles, et toutes les arêtes vont d'un ensemble à l'autre. On s'intéresse maintenant au coloriage d'un graphe général.

### 4.2.1 Algorithme glouton 1

Pour colorier un graphe général :
- prendre les sommets dans un ordre au hasard ;
- leur attribuer la plus petite valeur possible, i.e. la plus petite valeur qui n'a pas déjà été attribuée à un voisin.

Soit $K$ le nombre de couleurs utilisées. Alors $K \leq \Delta(G)+1$, où $\Delta(G)$ est le degré maximal d'un sommet, le degré d'un sommet étant le nombre d'arêtes auxquelles appartient ce sommet. En effet, au moment où on traite un sommet donné, il a au plus $\Delta(G)$ voisins déjà coloriés, donc l'algorithme glouton n'est jamais forcé d'utiliser plus de $\Delta(G)+1$ couleurs.

Pour une clique (un graphe complet, avec toutes les arêtes possibles), il n'est pas possible de faire mieux.

### 4.2.2 Algorithme glouton 2

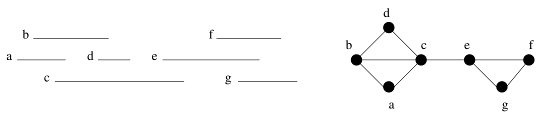
- trier les sommets par degré décroissant ;
- prendre les sommets dans cet ordre ;
- leur attribuer la plus petite valeur possible.

Soit $n = |V|$ le nombre de sommets, et $d_i$ le degré du sommet $v_i$. On montre alors que $K \leq \max_{1 \leq i \leq n} \min(d_i+1, i)$. En effet, au moment où on colorie le $i$-ème sommet $v_i$, il a au plus $\min(d_i, i-1)$ voisins qui ont déjà été coloriés, et donc sa propre couleur est au plus $1+\min(d_i, i-1) = \min(d_i+1, i)$. En prenant le maximum sur $i$ de ces valeurs, on obtient la borne demandée.

Cette borne suggère de se débarrasser d'abord des plus gros degrés, qui disparaissent ainsi de la complexité tant que $\min(d_i+1, i) = i$. Comme on ne sait pas a priori jusqu'à quand privilégier les grands degrés, on a trié l'ensemble des sommets par degrés décroissants dans l'algorithme glouton.

### 4.2.3 Graphe d'intervalles

L'algorithme glouton, avec un ordre astucieux, est optimal pour les graphes d'intervalles. Etant donnée une famille d'intervalles (disons sur la droite réelle), on définit un graphe dont les sommets sont les intervalles, et dont les arêtes relient les sommets représentant les intervalles qui s'intersectent. Voici un exemple :




On montre que l'algorithme glouton colorie le graphe de manière optimale si l'on énumère les sommets d'un graphe d'intervalles $G$ selon l'ordre donné par les extrémités gauches des intervalles, à savoir $a, b, c, d, e, f, g$ sur l'exemple.

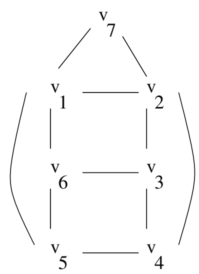
Sur l'exemple on obtient le coloriage $1, 2, 3, 1, 1, 2, 3$ qui est bien optimal. Dans le cas général, exécutons l'algorithme glouton avec l'ordre spécifié des sommets. Supposons que le sommet $v$ reçoive la couleur maximale $k$. Pourquoi $v$ ne reçoit-il pas une couleur plus petite ? Parce que l'extrémité de gauche $a$ de son intervalle appartient aussi à des intervalles qui ont déjà reçu les couleurs $1$ à $k-1$. Ces intervalles ont donc tous le point $a$ en commun, si bien que $G$ possède une clique (un sous-graphe complet) de taille $k$. Le cardinal maximal d'une clique de $G$ est donc supérieur ou égal à $k$. Comme tous les sommets d'une clique doivent recevoir une couleur différente, on voit que l'on ne peut pas faire mieux que $k$ couleurs. L'algorithme glouton est donc optimal.

### 4.2.4 Algorithme de Brelaz

L'idée intuitive est de colorier en priorité les sommets ayant beaucoup de sommets déjà coloriés. On définit le degré-couleur d'un sommet comme son nombre de voisins déjà coloriés. Le degré-couleur, qui va évoluer au cours de l'algorithme, est initialisé à 0 pour tout sommet :

- prendre parmi les sommets de degré-couleur maximal un sommet de degré maximal, et lui attribuer la plus petite valeur possible.

Il s'agit d'un glouton sur (degré-couleur, degré), appelé algorithme de Brélaz. Considérons l'exemple ci-dessous :




On prend au départ un sommet de degré maximal, par exemple $v_1$, et on lui donne la couleur 1. Le degré-couleur de $v_2$, $v_5$, $v_6$ et $v_7$ passe à 1, on choisit $v_2$ qui est de degré maximal parmi ces trois sommets, et on lui donne la couleur 2. Maintenant, $v_7$ est le seul sommet de degré-couleur 2, on le choisit et on lui attribue la couleur 3. Tous les sommets restants (non coloriés) ont le même degré-couleur 1 et le même degré 3, on choisit $v_3$ au hasard, et on lui donne la couleur 1. Puis $v_4$, de degré-couleur 2, reçoit la couleur 3. Enfin $v_5$ reçoit la couleur 2 et $v_6$ la couleur 3. Le graphe est 3-colorié, c'est optimal.

**Théorème 6.** *L'algorithme de Brelaz est optimal sur les graphes bipartis, i.e. réussit toujours à les colorier avec deux couleurs.*

**Preuve**. On considère un graphe biparti $G = (V, E)$, $V = B \cup R$ : toute arête de $E$ relie un sommet de $B$ (bleu) et un sommet de $R$ (rouge). Remarquons d'abord que les deux premiers algorithmes gloutons peuvent se tromper : par exemple soit $G$ avec $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $R = \{r_1, r_2, r_3\}$, et les six arêtes $(b_i, r_i)$, $1 \leq i \leq 3$, $(b_1, r_2)$, $(b_2, r_3)$ et $(b_3, r_1)$. Tous les sommets sont de degré 2. Si on commence par colorier un sommet de $B$, disons $b_1$, puis un sommet non adjacent de $R$, $r_3$, avec la même couleur 1, on ne pourra pas terminer avec seulement 2 couleurs. Par contre, en utilisant la variante de Brelaz avec les degrés-couleur sur ce petit exemple, après $b_1$ on doit colorier soit $r_1$ soit $r_2$, et on ne se trompe pas. Pour le cas général, considérons $G = (V, E)$, $V = B \cup R$ connexe biparti, et colorions le avec l'algorithme de Brelaz. On commence par colorier un sommet, disons, de $B$, en bleu. Puis on colorie nécessairement un sommet adjacent (de degré-couleur 1), donc de $R$, en rouge. Par la suite, on ne colorie que des sommets de degré-couleur égal à 1, c'est l'invariant qui donne le résultat. □

**Remarque** Le problème du coloriage des graphes est NP-complet.

## 4.3 Théorie des matroïdes

Petite théorie basée sur les matroïdes permettant de savoir si un algorithme glouton est optimal pour un problème.

### 4.3.1 Matroïdes

**Définition 1.** *$(S,\mathcal{I})$ est un matroïde si $S$ est un ensemble de $n$ éléments, $\mathcal{I}$ est une famille de parties de $S$, $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(S)$, vérifiant :*
*- l'hérédité : $X \in \mathcal{I} \Rightarrow \forall Y \subset X, Y \in \mathcal{I}$*
*- l'échange :$(A, B \in \mathcal{I},\ |A| < |B|) \Rightarrow \exists x \in B \setminus A\ tq\ A \cup \{x\} \in \mathcal{I}$*
*Si $X \in \mathcal{I}$, on dit que $X$ est un indépendant.*

**Exemples**

1. Les familles libres d'un espace vectoriel
2. Les forêts[1] d'un graphe.

Soit $G = (V, E)$ un graphe , $|V| = n$, on définit alors $S = E$ et $\mathcal{I} = \{A \subset E/A \text{ sans cycles}\}$, c.a.d. qu'un ensemble d'arêtes est un indépendant *ssi* c'est une forêt.

- L'hérédité est évidente, car un sous-ensemble d'une forêt est une forêt (en enlevant des arêtes à une forêt on ne crée pas de cycles).
- L'échange :
  Soient $A$ et $B$ des forêts de $G$ $tq$ $|A| < |B|$. Alors $A$ (resp. $B$) contient $n - |A|$ (resp. $n - |B|$) arbres (avec chaque arête ajoutée à $A$, on relie deux arbres, donc on décrémente de un le nombre d'arbres de $A$).
  Donc $B$ contient moins d'arbres que $A$, il existe alors un arbre $T$ de $B$ qui n'est pas inclus dans un arbre de $A$, c.a.d. qu'il existe deux sommets $u$ et $v$ de $T$ qui n'appartiennent pas au même arbre de $A$. Sur le chemin de $u$ à $v$ dans $T$, il existe une paire de sommets consécutifs qui ne sont pas dans le même arbre de $A$ (ils sont de chaque côté du *pont* qui traverse d'un arbre de $A$ à l'autre). Soit $(x, y)$ l'arête en question. d'ou $A \cup \{(x, y)\}$ est sans cycle, i.e. $A \cup \{(x, y)\} \in \mathcal{I}$

**Définition 2.** *Un indépendant est dit maximal s'il est maximal au sens de l'inclusion*

**Lemme 2.** *Tous les indépendants maximaux ont même cardinal.*

(Si ce n'était pas le cas, on pourrait les étendre par la propriété d'échange)

### 4.3.2 Algorithme glouton

**Fonction de poids** $x \in S \mapsto w(x) \in \mathbb{N}$; $\quad X \subset S\ ,\ w(X) = \sum_{x \in X}\ w(x)$

**Question** Trouver un indépendant de poids maximal.
Par glouton : trier les éléments de $S$ par poids décroissant.
$A \leftarrow \emptyset$[2]
*For* $i = 1$ *to* $|S|$
  *si* $A \cup \{s_i\} \in \mathcal{I}$ *alors* $A \leftarrow A \cup \{s_i\}$

**Théorème 7.** *Cet algorithme donne la solution optimale.*

**Preuve**. Soit $s_k$ le premier élément indépendant de $S$, ie le premier indice $i$ de l'algorithme précédent tel que $\{s_i\} \subset \mathcal{I}$.

**Lemme 3.** *Il existe une solution optimale qui contient $s_k$.*

[1]Une forêt est un ensemble d'arbres, i.e. un graphe non-orienté sans cycles
[2] $\emptyset$ est un indépendant, par l'hérédité

*En effet :* Soit $B$ une solution optimale, i.e. un indépendant de poids maximal et $A$ la solution renvoyée par glouton, $s_k \in A$,on a alors :

1. soit $s_k \in B$, donc c'est bon.
2. soit $s_k \notin B$, on applique $|B| - 1$ fois la propriété d'échange, d'où l'indépendant $A = B \backslash \{b_i\} \cup \{s_k\}$, où $\{b_i\}$ est l'élément restant de $B$ (car $|A| = |B|$ et $A$ contient déjà $s_k$)
   On a $w(A) = w(B) - w(b_i) + w(s_k)$, or $w(s_k) \geq w(b_i)$ car $b_i$ indépendant (par l'hérédité) et $b_i$ a été trouvé après $s_k$, par ordre décroissant.
   Donc $w(A) \geq w(B)$, d'où $w(A) = w(B)$, A optimal.

Puis, par récurrence on obtient que glouton donne la solution optimale : on se restreint à une solution contenant $\{s_k\}$, et on recommence avec $S' = S\backslash\{s_k\}$ et $\mathcal{I}' = \{X \subset S'/X \cup \{s_k\} \in \mathcal{I}\}$. □

**Retour à l'exemple des forêts d'un graphe** Le théorème précédent assure de la correction de l'algorithme glouton dû à Kruskal pour construire un arbre de poids minimal : trier toutes les arêtes par poids croissant, et sélectionner au fur et à mesure celles qui ne créent pas de cycle si les on ajoute à l'ensemble courant. Bien sûr, il faudrait discuter d'une structure de données adaptées pour vérifier la condition "ne crée pas de cycle" rapidement.

## 4.4 Ordonnancement

On donne ici un exemple d'algorithme glouton, dont on démontre l'optimalité avec la théorie des matroïdes. C'est un problème d'ordonnancement à une machine.

Données : n tâches $T_1 .... T_n$ de durée 1, deadlines associées : $d_1, ..., d_n$. Pénalités associées si le deadline est dépassé : $w_1, ..., w_1$.

*Ordonnancement* : $\sigma : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N}$ qui à chaque tâche associe le top de début d'exécution. Si une tâche $T_i$ finit après son deadline $d_i$, alors cela crée la pénalité $w_i$.
But : minimiser la pénalité totale, c'est à dire : somme sur les taches en retard des pénalités.

Intérêt de l'ordonnancement : sur les chaînes de production en usine, optimisation des calculs sur des systèmes multiprocesseurs. Ici, le problème est simplifié (et cela permet que glouton marche).

On va donc chercher le meilleur ordre pour l'exécution des tâches.

**Définition 3.** *tâche à l'heure : tâche finie avant le deadline*
*tâche en retard : tâche finie après le deadline.*

Pour notre problème on va se restreindre :

1. Aux ordonnancements où les tâches à l'heure précèdent les tâches en retard : en effet, cela ne restreint pas le problème, car si on avait une tâche en retard qui s'exécutait avant une tâche à l'heure, les permuter ne changerait rien à la pénalité totale.
2. Aux ordonnancement où les tâches à l'heure sont classées par ordre de deadline croissant : de même que précédemment cela ne restreint pas le problème, car si on avait une tâche $T_i$ de deadline $d_i$ et une tâche $T_j$ de deadline $d_j$, avec $d_i > d_j$ et $T_i$ s'exécutant avant $T_j$, alors si on permute les ordres d'exécution de $T_i$ et de $T_j$ , $T_i$ reste à l'heure, car $d_i > d_j$ et $T_j$ était à l'heure, de plus $T_j$ reste à l'heure car on avance son moment d'exécution.

On dira qu'on a l'ordre canonique si les deux conditions précédentes sont vérifiées.

Exemple : 7 tâches :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| $d_i$ | 4 | 2 | 4 | 3 | 1 | 4 | 6 |
| $w_i$ | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

Remarque : minimiser la pénalité totale des tâches en retard $\Leftrightarrow$ maximiser la pénalité des tâches à l'heure.

Glouton : On commence par trier les tâches par $w_i$ décroissants puis on "gloutonne", c'est à dire qu'on prend la tâche si elle tient sans pénalité (on regarde si l'ordre canonique marche).

Application : 2,1 ;2,1,3 ;2,4,1,3 ; 2,4,1,3,7
La solution optimale est donc 2,4,1,3,7 et la pénalité minimale est 5.

Ici, l'idée a été de *réordonner* à chaque fois.

**Définition 4.** *un ensemble de tâches est indépendant $\Leftrightarrow$ elles peuvent être exécutées en étant toutes à l'heure.*

**Lemme 4.** *A ensemble de tâches,$N_t(A)$ = nombre de tâches de deadline $\leq t$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est indépendant*
2. *$\forall\ t$ = 1,2,...,n, $N_t(A) \leq t$*
3. *Ordre canonique $\rightarrow$ pas de tâches en retard.*

**Preuve**.
- 1 $\Rightarrow$ 2 : Par contraposée : supposons que $N_t > t$, alors il y a au moins une tâche qui se déroulera après le temps t, donc qui sera pénalisée, donc A ne sera pas indépendant.
- 2 $\Rightarrow$ 3 : trivial
- 3 $\Rightarrow$ 1 : définition

□

**Proposition 1.** *On a un matroïde.*

**Preuve**.
- Hérédité : trivial
- Echange : Soit A,B indépendants et |A| < |B|.Existe-t-il x appartenant à B tel que A$\cup${x} soit indépendant ?
  Idée : Comparer $N_t$(A) et $N_t$(B) pour t=1,..,n
  On cherche donc le plus grand t$\leq$n tel que $N_t$(A)$\geq N_t$(B). On sait que t<n donc :$N_t$(A)$\geq N_t$(B) ,$N_{t+1}$(A)<$N_{t+1}$(B),...,$N_n$(A)<$N_n$(B) Dans B il y a plus de tâches de deadline t+1 que dans A$\Rightarrow$ J'en prends une qui n'est pas déjà dans A :x et alors A$\cup${x} marche.

□

## 4.5 Exercices

**Exercice 4.5.1.** *Couverture par intervalles*

Etant donné un ensemble $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de $n$ points sur une droite, décrire un algorithme qui détermine le plus petit ensemble d'intervalles fermés de longueur 1 qui contient tous les points donnés. Prouver la correction de votre algorithme et donner sa complexité.

**Correction.**

**début**
Trier dans l'ordre croissant les $x_i$ ;
$X \leftarrow \{x_1, \ldots, x_n\}$;
$I \leftarrow \emptyset$;
**tant que** $X \neq \emptyset$ **faire**
$x_k \leftarrow \min(X)$;
$I \leftarrow I \cup \{[x_k, x_k+1]\}$;
$X \leftarrow X \backslash [x_k, x_k+1]$
**Retourner** $I$ ;
**fin**

La complexité est $n \log n$ (tri) $+$ $n$ (parcours de X), c'est-à-dire $O(n \log n)$

**Théorème :** Cet algorithme est optimal.

**Méthode 1 : avec des matroïdes.** Cette méthode ne fontionne pas. Il est impossible d'exhiber un matroïde (on ne peut pas prouver la propriété d'échange)

**Méthode 2 : par récurrence sur $|X|$** . On ajoute un à un les élements. On montre que le premier est bien contenu dans l'ensemble fournit par l'algorithme.

- **Initialisation :** Si on a qu'un seul point, l'algorithme renvoie un seul intervalle : c'est une solution optimale.
- Soient un recouvrement optimal $I_{opt} = \{[a_1, a_1+1], \ldots, [a_p, a_p+1]\}$ avec $a_1 < \cdots < a_p$ et le recouvrement donné par notre algorithme $I_{glou} = \{[g_1, g_1+1], \ldots, [g_m, g_m+1]\}$ avec $g_1 < \cdots < g_m$. Montrons que $m = p$.
- On pose $I = \left(I_{opt} \backslash \{[a_1, a_1+1]\}\right) \cup \{[g_1, g_1+1]\}$.
  Puisque $g_1 = x_1$, $I$ est un recouvrement de $X$ car $a_1 \leq x_1 \Rightarrow a_1+1 \leq x_1+1 = g_1+1$ donc $X \cap [a_1, a_1+1] \subseteq X \cap [g_1, g_1+1]$ ; autrement-dit $I_{opt} \backslash \{[a_1, a_1+1]\}$ est un recouvrement de $X \backslash \{[g_1, g_1+1]\}$.
- Par hypothèse de récurrence, sur $X \backslash [g_1, g_1+1]$ une solution optimale est donnée par glouton : $\{[g_2, g_2+1], \ldots, [g_m, g_m+1]\}$ car $|X| \backslash [g_1, g_1+1] \leq n-1$
- Comme $I_{opt} \backslash \{[a_1, a_1+1]\}$ est un recouvrement de $X \backslash [g_1, g_1+1]$ avec $p-1$ intervalles, on a :
  $$\left.\begin{array}{r} p-1 \geq m-1 \Rightarrow p \geq m \\ \left.\begin{array}{l} I_{opt} \text{ optimal sur } X \\ I_{glou} \text{ recouvrement de } X \end{array}\right\} \Rightarrow m \geq p \end{array}\right\} \Rightarrow m = p$$
  Puisque $p$ est le nombre d'intervalles que renvoie un algorithme optimal, et que $m = p$, alors, notre glouton est optimal.

### Exercice 4.5.2. *Codage de Huffman*

Soit $\Sigma$ un alphabet fini de cardinal au moins deux. Un *codage binaire* est une application injective de $\Sigma$ dans l'ensemble des suites finies de 0 et de 1 (les images des lettres de $\Sigma$ sont appelées *mots de code*). Il s'étend de manière naturelle par concaténation en une application définie sur l'ensemble $\Sigma^*$ des mots sur $\Sigma$. Un codage est dit *de longueur fixe* si toutes les lettres dans $\Sigma$ sont codées par des mots binaires de même longueur. Un codage est dit *préfixe* si aucun mot de code n'est préfixe d'un autre mot de code.

1 - Le décodage d'un codage de longueur fixe est unique. Montrer qu'il en est de même pour un codage préfixe.

2 - Représenter un codage préfixe par un arbre binaire dont les feuilles sont les lettres de l'alphabet.

On considère un texte dans lequel chaque lettre $c$ apparaît avec une fréquence $f(c)$ non nulle. A chaque codage préfixe de ce texte, représenté par un arbre $T$, est associé un coût défini par :

$$B(T) = \sum_{c \in \Sigma} f(c) l_T(c)$$

où $l_T(c)$ est la taille du mot binaire codant $c$. Si $f(c)$ est exactement le nombre d'occurences de $c$ dans le texte, alors $B(T)$ est le nombre de bits du codage du texte.

Un codage préfixe représenté par un arbre $T$ est *optimal* si, pour ce texte, il minimise la fonction $B$. Montrer qu'à un codage préfixe optimal correspond un arbre binaire où tout nœud interne a deux fils. Montrer qu'un tel arbre a $|\Sigma|$ feuilles et $|\Sigma| - 1$ nœuds internes.

3 - Montrer qu'il existe un codage préfixe optimal pour lequel les deux lettres de plus faibles fréquences sont soeurs dans l'arbre (autrement dit leurs codes sont de même longueur et ne diffèrent que par le dernier bit) - *Propriété de choix glouton.*

Etant donnés $x$ et $y$ les deux lettres *de plus faibles fréquences* dans $\Sigma$, on considère l'alphabet $\Sigma' = \Sigma - \{x, y\} + \{z\}$, où $z$ est une nouvelle lettre à laquelle on donne la fréquence $f(z) = f(x) + f(y)$. Soit $T'$ l'arbre d'un codage optimal pour $\Sigma'$, montrer que l'arbre $T$ obtenu à partir de $T'$ en remplaçant la feuille associée à $z$ par un nœud interne ayant $x$ et $y$ comme feuilles représente un codage optimal pour $\Sigma$ - *Propriété de sous-structure optimale.*

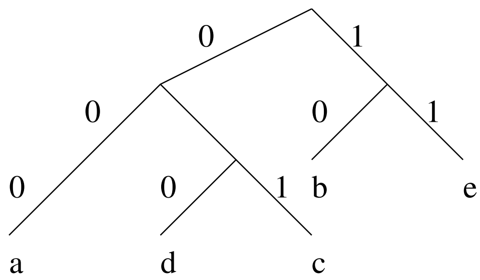
4 - En déduire un algorithme pour trouver un codage optimal et donner sa complexité. A titre d'exemple, trouver un codage optimal pour $\Sigma = \{a, b, c, d, e, g\}$ et $f(a) = 45$, $f(b) = 13$, $f(c) = 12$, $f(d) = 16$, $f(e) = 9$ et $f(g) = 5$.

**Correction.**

**1** - Dans un codage préfixe, le décodage est unique. En effet, si $x$ peut se décoder de deux façons, alors $x = ua$ et $x = vb$, et donc $u$ est préfixe de $x$ ou $v$ est préfixe de $u$, donc $u = v$ pour un codage préfixe.

**2** - On peut représenter le codage préfixe par un arbre : on associe 0 à chaque branche gauche et 1 à chaque branche droite. Pour chaque caractère, on lit le code à partir de la racine. Ainsi, l'arbre représenté dans la figure 4.1 correspond au codage des lettres a, b, c, d et e.

| | |
|---|---|
| a | 000 |
| b | 10 |
| c | 011 |
| d | 010 |
| e | 11 |




TAB. 4.1 – Codage de a,b,c,d et e

Chaque codage préfixe optimal correspond à un arbre binaire où tout nœud interne a deux fils. En effet, s'il existe un nœud qui n'a qu'un fils, alors on diminue le $L_T(c)$ en remontant le sous-arbre correspondant : soit la feuille correspondant à la lettre $c$ était dans le sous-arbre, dans ce cas $L'_T(c) = L_T(c) - 1$, soit elle n'y était pas et $L'_T(c) = L_T(c)$ (cf figure 4.3).

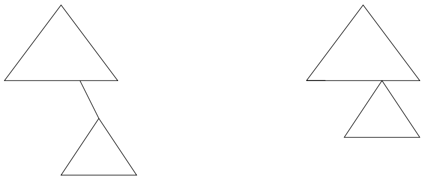


Fig. 4.3 – Chaque codage préfixe optimal correspond à un arbre binaire dont les nœuds internes ont deux fils

Un tel arbre a par construction $|\Sigma|$ feuilles, puisqu'il code $|\Sigma|$ lettres. Montrons par récurrence qu'il a $|\Sigma| - 1$ nœuds :
- Un arbre à 2 feuilles a 1 nœud.
- Si l'arbre est constitué de deux sous-arbres de $i$ et $j$ feuilles, alors les deux sous-arbres ont $i-1$ et $j-1$ nœuds (par hypothèse de récurrence), et l'arbre total a donc $i-1+j-1+1 = i+j-1$ nœuds, la propriété est donc vraie.

**3** - Montrons qu'il existe un codage préfixe optimal pour lequel les deux lettres de plus faibles fréquences sont sœurs dans l'arbre. Soit $T$ un codage optimal. On a $\forall T', B(T) \leq B(T')$. Soient $x$ et $y$ les lettres de fréquences les plus basses, et $a$ et $b$ deux lettres sœurs de profondeur maximale dans $T$. Construisons alors un arbre $T''$ en inversant les positions de $x$ et de $a$, ainsi que celles de $y$ et de $b$.

On veut montrer que $T''$ est optimal, c'est à dire que $B(T) = B(T'')$.

$$\begin{aligned} B(T) - B(T'') &= f(a)l_T(a) + f(b)l_T(b) + f(x)l_T(x) + f(y)l_T(y) \\ &\quad -f(a)l_{T''}(a) - f(b)l_{T''}(b) - f(x)l_{T''}(x) - f(y)l_{T''}(y) \end{aligned}$$

Comme on a les égalités suivantes :

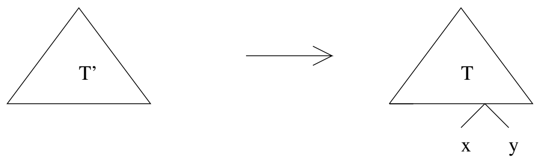
$$\begin{aligned} l_{T''}(a) &= l_T(x) \\ l_{T''}(b) &= l_T(y) \\ l_{T''}(x) &= l_T(a) \\ l_{T''}(y) &= l_T(b) \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité :

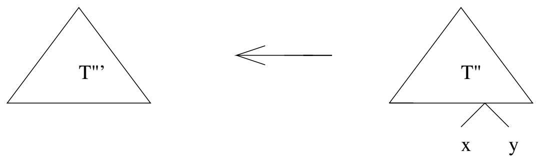
$$B(T) - B(T'') = [f(a) - f(x)][l_T(a) - l_T(x)] + [f(b) - f(y)][l_T(b) - l_T(y)]$$

$f(a) \geq f(x)$ et $f(b) \geq f(y)$, $l_T(a) \geq l_T(x)$ et $l_T(b) \geq l_T(y)$, donc $B(T) - B(T'') \geq 0$.
Donc comme $T$ est un codage optimal, alors $T''$ aussi. On a donc un codage préfixe optimal dans lequel les deux lettres de plus faibles fréquences sont sœurs dans l'arbre. (*Propriété de choix glouton*).

On considère maintenant $\Sigma' = \Sigma \setminus \{x, y\} + \{z\}$, où $z$ est une nouvelle lettre de fréquence $f(z) = f(x) + f(y)$. Soit $T'$ l'arbre d'un codage optimal pour $\Sigma'$, on veut montrer que l'arbre $T$ obtenu à partir de $T'$ en remplaçant la feuille associée à $z$ par un nœud de feuilles $x$ et $y$ est optimal pour $\Sigma$.




Soit $T''$ un arbre optimal pour $\Sigma$. D'après la propriété de choix glouton, on peut supposer que $x$ et $y$ sont sœurs dans $T''$. On peut alors construire un arbre $T'''$ en remplaçant le nœud de fils $x$ et $y$ par une feuille $z$.




On a alors $B(T''') = B(T'') - f(x) - f(y)$.
Or $T'$ est optimal, donc $B(T') \leq B(T''')$. Comme $B(T) = B(T') + f(x) + f(y)$, on en déduit que $B(T) \leq B(T'')$. Donc $T$ est optimal car $T''$ est optimal.

**4** - On en déduit l'algorithme suivant pour le codage de Huffman :

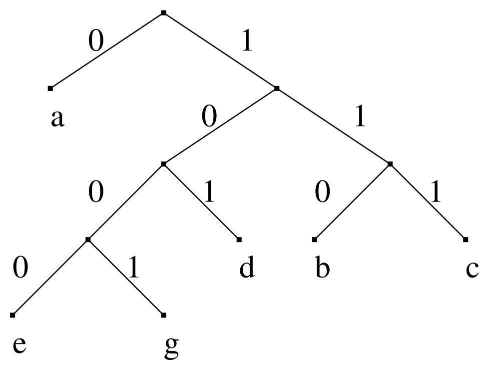
$Huffman(\Sigma, f)$
**début**
  $F \leftarrow$ tas_binaire$(\Sigma, f)$ ;
  $n \leftarrow |\Sigma|$ ;
  **pour** $i$ **de** *1* **à** $n-1$ **faire**
    $z \leftarrow$allouer_noeud() ;
    $x \leftarrow$extraire_min$(F)$ ;
    $y \leftarrow$extraire_min$(F)$ ;
    $z(gauche) \leftarrow x$ ;
    $z(droite) \leftarrow y$ ;
    $f(z) \leftarrow f(x) + f(y)$ ;
    Insérer$(F, z, f(z))$ ;
  **Retourner** extraire_min$(F)$ ;
**fin**

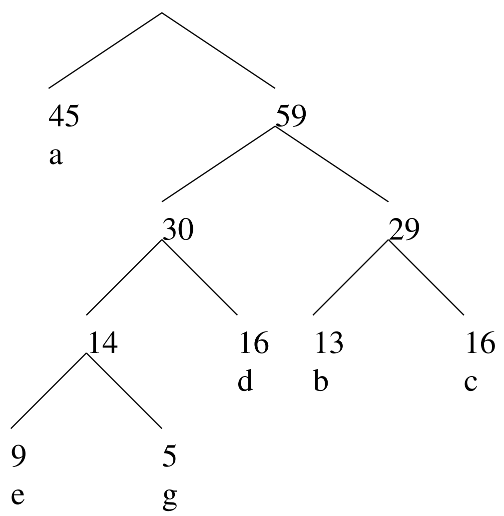
Calculons la complexité de cet algorithme :
Pour un tas binaire, le coût des opérations est le suivant :

- Savoir si la file est vide $O(1)$.
- Insérer un élement $O(\log n)$
- Trouver un élément de clé minimale $O(1)$
- Extraire l'élément de clé minimale $O(\log n)$

La complexité d'une itération de la boucle est donc en $O(\log n)$.
La complexité totale est donc en $O(n \log n)$, car il y a $n$ itérations de la boucle, et que la construction du tas est en $O(n \log n)$.

Voici l'arbre que l'on obtient en appliquant cet algorithme à $\Sigma = \{a, b, c, d, e, g\}$ avec $f(a) = 45$, $f(b) = 13$, $f(c) = 12$, $f(d) = 16$, $f(e) = 9$, $f(g) = 5$ :


0
1
a
0
1
0
1
0
1
0
1
d
b
c
e
g


45
a
59
30
29
14
16
d
13
b
16
c
9
e
5
g

# Chapitre 5

# Tri

## 5.1 Tri rapide

Tri rapide : n éléments à trier, on prend l'un d'entre eux, appelé pivot, et on partage les éléments en les positionnant par rapport au pivot : à gauche ceux qui sont plus petits que le pivot, et à droite ceux qui sont supérieurs ou égaux. On fait deux appels récursifs de la méthode pour continuer, un dans chaque sous-ensemble gauche et droite.

### 5.1.1 Coût

Le partage se fait en temps linéaire. Si on partage un tableau de taille $n$ en deux sous-ensembles de taille $p$ et $q$, avec $p + q = n$, le coût $TR(n)$ de TriRapide est $TR(n) = c.n + TR(p) + TR(q)$.

D'après l'analyse faite pour diviser-pour-régner, on obtiendra un coût $TR(n)$ en $n \log n$ si on sait garantir que $p$ et $q$ ne sont pas trop grands. L'idéal serait d'avoir $p = q$ ou $|p - q| = 1$, donc $p$ et $q$ proches de $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

C'est ce qui se passe en moyenne, et on peut montrer que la version de TriRapide, qui prend comme pivot le premier élément du tableau courant, a un coût moyenné sur les $n!$ permutations en $n \log n$. Ce n'est pas le pire cas de cette version, clairement en $n^2$.

Pour avoir un pire cas en $n \log n$, on met en oeuvre la version où on choisit l'élément médian du tableau courant, autour duquel on va partager les éléments. Comme il existe un algorithme linéaire pour le calcul de la médiane, exposé ci-dessous, le but est atteint.

Il faut noter que TriRapide fonctionne très *rapidement* en pratique, et c'est lui qui sous-tend la routine QSORT() d'Unix.

### 5.1.2 Médiane en temps linéaire

#### Problème

**données :** ensemble $A$ de $n$ éléments distincts totalement ordonné

**résultat :** le $i$-ème élément $x$ de $A$.

**remarque :** on pourrait trier $A$ et sortir le $i$-ème élément, ce qui se fait en $O(n \log n)$.

**définition :** intuitivement, $y$ est médiane de A ssi A possède autant d'éléments supérieurs à $y$ que d'éléments inférieurs à $y$. On dit que la médiane de $A$ est l'élément de rang $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ pour régler le cas où $n$ est pair.

**Algorithme**

- faire des paquets de taille 5 (sauf le dernier éventuellement de taille inférieure) ;
- prendre la médiane de chaque paquet ;
- prendre la médiane $Z$ des médianes ;
- partitionner autour de Z : $\underbrace{\ldots}_{k-1} \leq Z \leq \underbrace{\ldots}_{n-k}$ ;
  - si $k = i$, renvoyer $Z$ ;
  - si $k > i$, appel récursif : chercher le $i$-ème parmi les $k-1$ éléments de gauche ;
  - si $k < i$, appel récursif : chercher le $(i-k)$-ème parmi les $n-k$ éléments de droite.

**Complexité** Soit $n$ quelconque et $n'$ le premier multiple de 5 impair supérieur ou égal à $n$. Alors $n \leq n' \leq n+9$.
Si $n' = 5(2m+1)$, la liste des médianes est la suivante :

$$Z_1 \leq \ldots \leq Z_m \leq Z \leq Z_{m+2} \leq \ldots \leq Z_{2m+1}$$

On voit qu'il y a $\left\{ \begin{array}{l} \text{au moins } 3m+2 \text{ éléments inférieurs à } Z \\ \text{au moins } 3m+2 \text{ éléments supérieurs à } Z \end{array} \right.$
Le coût de l'algorithme ci-dessus $T(n)$ vérifie

$$T(n) = T(\frac{n'}{5}) + T(n' - 3m - 2) + an$$

Remarque : $\left\{ \begin{array}{l} n' \leq n+9 \\ n' - 3m - 2 \leq n' - \frac{3}{2}(\frac{n'}{5} - 1) - 2 \leq \frac{7}{10}(n+9) - \frac{1}{2} \leq \frac{7}{10}n + 6 \end{array} \right.$

**Théorème 8.** $\exists c, T(n) \leq cn$

**Preuve**. Par récurrence, supposons le résultat vrai $\forall k < n$. Alors

$$T(n) \leq c\frac{n+9}{5} + c(\frac{7}{10}n + 6) + an = (\frac{9}{10}c + a)n + \frac{39}{5}c$$

On veut $(\frac{9}{10}c + a)n + \frac{39}{5}c \leq cn$ .

Or $\frac{39c}{5} \leq \frac{cn}{20}$ ssi $20 \leq \frac{5n}{39}$ ssi $n \geq 156$ .

Donc pour $n \geq 156$, $(\frac{9c}{10} + a)n + \frac{39c}{5} \leq (\frac{19c}{20} + a)n$.

Ainsi il suffit de prendre $\left\{ \begin{array}{l} c \geq 20a \\ c \geq \max_{1 \leq k \leq 156} \frac{T(k)}{k} \end{array} \right.$

□

## 5.2 Tri fusion

Tri Fusion : n éléments à trier, appel de TF(1,n) $\rightarrow$ appels récursifs de TF(1,$\lfloor n/2 \rfloor$) et TF($\lfloor n/2 \rfloor + 1$,n) puis fusion des deux sous listes triées.

Algorithme de fusion de deux listes de taille $p$ et $q$ : on compare les deux premiers des deux listes, on prend le plus petit et on recommence avec les deux listes restantes. On fait un total de $p+q-1$ comparaisons.

Complexité : ici, c'est en terme de comparaisons qu'il faut compter. Comme la somme des tailles des deux listes à fusionner est toujours $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n$ :

$$comp_{TF}(n) = comp_{TF}(\lfloor n/2 \rfloor) + comp_{TF}(\lceil n/2 \rceil) + n - 1$$

avec $comp_{TF}(1) = 0$

Donc, d'après le Master Théorème, $comp_{TF}(n) = \bigcirc(n \log_2 n)$. En fait, on peut montrer par récurrence un peu technique (distinguer les cas où $n = 2^r$ et $n = 2^r - 1$), que

$$comp_{TF}(n) = n\lceil \log_2 n \rceil - 2^{\lceil \log_2 n \rceil} + 1$$

- Avantages : Pas de grosse constante devant $(n \log_2 n)$, complexité constante (en moyenne, au pire, etc.)
- Inconvénients : Prend beaucoup de place, difficulté de fusionner deux listes "sur place", besoin d'un tableau auxiliaire de taille $n$, on l'utilise donc peu en pratique.

## 5.3 Tri par tas : Heapsort

### 5.3.1 Définitions

- **Arbre binaire parfait** : tous les niveaux de l'arbre sont complets sauf le dernier que l'on remplit de gauche à droite.
- **Arbre partiellement ordonné** : la valeur d'un fils est supérieure ou égale à la valeur du père.
- **Tas** : arbre binaire et partiellement ordonné.

Soit un tas de $n$ éléments numérotés de 1 à $n$. Considérons un noeud i de l'arbre qui ne soit pas la racine. Son père est $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$. Son fils gauche est $2i$ s'il existe ($2i \leq n$) et son fils droit est $2i + 1$ s'il existe ($2i + 1 \leq n$). Pour tout noeud i autre que la racine : $A[\text{père}(i)] \leq A[i]$.

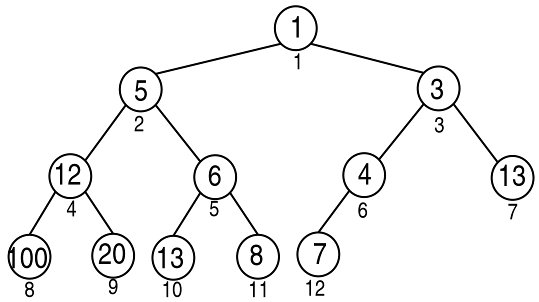



Fig. 5.1 – Exemple de tas

L'avantage du tas est l'utilisation d'un tableau de taille $n$ comme structure de données : on n'a pas besoin de pointeurs fils gauche fils droit.

### 5.3.2 Tri par tas

Soit n éléments que l'on souhaite trier. On les insère un à un dans le tas (procédure insertion), on extrait le minimum puis on réorganise le tas.

```
proc trier_par_tas
FOR i=1 TO n
inserer(TAS,ième élément)
FOR i=1 TO n
suppression_min(TAS)
```

### 5.3.3 Insertion d'un nouvel élément

Il faut garder le caractère partiellement ordonné de l'arbre et, plus dur, son caractère parfait. On place si possible l'élément à droite de la dernière feuille, et si le niveau est complet on le place en dessous, tout à gauche. On procède ensuite par échanges locaux : on compare l'élément avec son père, et on les échange si l'inégalité n'est pas respectée. Le coût de l'insertion est $\log(n)$ puisque l'on fait au plus autant de comparaisons qu'il y a d'étages dans l'arbre.

```
PROC inserer(var TAS::array[1..n],n,x)
n=n+1
TAS[n]=x
fini=FALSE
pas=n
WHILE (NOT(fini)) DO
  IF pas=1 THEN fini=TRUE
  ELSE IF TAS[(pas)div(2)] \le TAS[pas]
    THEN fini=TRUE
    ELSE TAS[pas]=TAS[(pas)div(2)]
         pas=(pas)div(2)
```

### 5.3.4 Suppression d'un élément du tas

On supprime la racine et on réorganise le graphe. Pour faire ceci, on fait remonter le dernier élément (en dessous tout à droite) en le substituant à la racine. On compare l'élément à ses deux fils, et si au moins l'un des deux est supérieur à l'élément, on échange le plus grand des deux fils à l'élément.

```
proc suppression_min(var  TAS::array[1..n])
x=TAS[1]
TAS[1]=TAS[n]
n=n-1
i=1
WHILE NOT(fini) DO
  IF i > n div 2 (i est une feuille)
  THEN fini = TRUE
  ELSE
     IF 2i=n or TAS[2i] < TAS[2i+1]
        THEN j=2i ELSE j=2i+1
     IF TAS[i] > TAS[j]
        THEN echange(TAS[i],TAS[j]); i=j
        ELSE fini = TRUE
```

## 5.4 Complexité du tri

### 5.4.1 Les grands théorèmes

**Attention.** On travaille dans un univers où on ne fait que des comparaisons. On a un ordre total pour les éléments qu'on veut trier, mais pas d'autre opération, ni d'information sur l'univers des éléments. Sans ces hypothèses, il existe des tris différents, sans comparaison du tout à proprement parler. Par exemple RadixSort utilise la décomposition binaire des entiers qu'il trie (penser à un jeu de cartes qu'on trie par couleur avant de trier par valeur). Par exemple encore, si on a l'information que tous les éléments sont des entiers entre 1 et $K$, on prépare un tableau de taille $K$ et on stocke en case $i$ le nombre d'éléments égaux à $i$ ; remplir ce tableau n'exige qu'un seul parcours des $n$ éléments, qu'on va pouvoir trier en temps linéaire.

**Théorème 9.** *Il faut* $\lceil \log_2(n!) \rceil = O(n \log(n))$ *comparaisons au pire pour trier* $n$ *éléments.*

**Théorème 10.** *Il faut* $\lceil \log_2(n!) \rceil = O(n \log(n))$ *comparaisons en moyenne pour trier* $n$ *éléments.*

Rappel sur la complexité en moyenne : $n!$ données différentes possibles (toutes les permutations des n éléments). Pour chaque donnée on compte le nombre de comparaisons nécessaires. On fait la moyenne de tous les cas possibles (la complexité moyenne est rarement calculable).

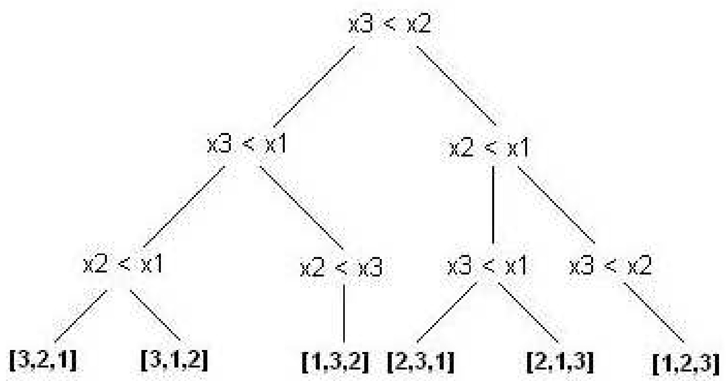
Bien sûr le second théorème implique le premier, mais on va le démontrer séparément. En fait, on va démontrer que $\lceil \log(n!) \rceil$ est une borne inférieure pour la complexité au pire et en moyenne. On a vu que la complexité de tri fusion ne dépend pas des données et vaut $comp_{TF}(n) = n\lceil \log_2(n) \rceil - 2^{\lceil \log_2(n) \rceil} + 1$, ce qui tend vers $n \log_2(n)$, montrant ainsi que la borne peut être atteinte asymptotiquement.

### 5.4.2 Démonstration des théorèmes

Voici le déroulement d'un tri en deux boucles (tri à bulle), dont le code pour trier un tableau $t[1..n]$ est le suivant :

```
for i = 1 to n do
   for j = n downto i+1 do
         if t[j] < t[j-1] then t[j] <-> t[j-1]
```

On a représenté l'arbre de décision : c'est la trace de l'exécution pour toutes les données possibles. C'est un arbre binaire (chaque comparaison renvoie 'oui' ou 'non'). Il n'y a pas toujours deux fils (l'arbre n'est pas localement complet), mais il y a exactement $n!$ feuilles.




**Lemme 5.** *Il y a exactement* $n!$ *feuilles dans tout arbre de décision d'un algorithme qui trie n éléments.*

**Preuve**. On fait des comparaisons entre les éléments. Si l'arbre avait moins de $n!$ feuilles, une même feuille correspondrait à deux permutations différentes, ce qui n'est pas possible. Pour une permutation donnée, il y a toujours le même chemin d'exécution, donc la même feuille, et le nombre de feuille est au plus $n!$. □

Il faut distinguer 'Hauteur maximale' et 'Hauteur moyenne'. La complexité de l'algorithme pour une donnée correspond à la hauteur de la feuille associée.

Pour démontrer les théorèmes, on a maintenant un problème d'hauteur d'arbre binaire. La *hauteur* d'une feuille est sa distance à la racine (définition), c'est le nombre de comparaisons effectuées pour la donnée correspondante.

On va montrer que pour un arbre à $n!$ feuilles, sa hauteur maximale, puis sa hauteur moyenne, sont supérieures à $\lceil \log_2(n!) \rceil$. On termine avec la formule de Stirling pour estimer $\log_2(n!) = O(n \log(n))$ :

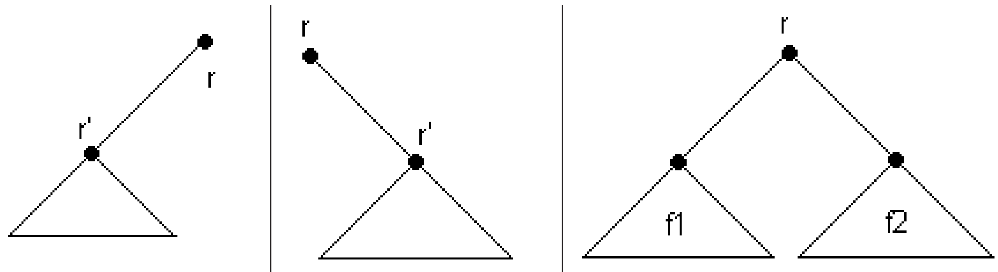
**Lemme 6.** *Pour tout arbre à $f$ feuilles, la hauteur moyenne est supérieure à $\lceil log_2(f) \rceil$.*

Pour la hauteur maximale, c'est facile. On considère l'arbre avec le plus de feuilles et le moins haut : l'arbre complet. On a donc la preuve du premier théorème.

**Preuve**. Pour la hauteur moyenne, on procède par récurrence sur le nombre de feuilles :

f = 1 : ça marche (évident), h = 0

cas général : supposons la propriété vraie pour tout $f' < f$, et considérons un arbre à $f$ feuilles. Il y a trois cas :



cas 1 cas 2 cas 3

cas 1 et 2 : profondeur des feuilles (distance à r) = 1 + distance à la sous-racine r'. On itère la construction jusqu'à tomber sur le cas 3, celui d'une racine qui a deux sous-arbres.

cas 3 : (plus compliqué), on considère $f = f_1 + f_2$, avec $f_1 \neq 0$ et $f_2 \neq 0$. On peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence.

La profondeur moyenne d'une feuille est :
- si f est à gauche, on a $Prof_T(f) = 1 + Prof_{T_1}(f)$
- si f est à droite, on a $Prof_T(f) = 1 + Prof_{T_2}(f)$.

On va alors pouvoir calculer la profondeur moyenne de T :

$$Prof_{moy}(T) = \frac{\sum_T Prof_T(f)}{f}$$

$$Prof_{moy}(T) = \frac{\sum_{T1} Prof_T(f) + \sum_{T2} Prof_T(f)}{f}$$

$$Prof_{moy}(T) = \frac{f_1 + \sum_{T1} Prof_T(f)}{f} + \frac{f_2 + \sum_{T2} Prof_T(f)}{f}$$

$$Prof_{moy}(T) = \frac{f_1 + Prof_{moy}(T1) * f1}{f} + \frac{f_2 + Prof_{moy}(T2) * f2}{f}$$

$$Prof_{moy}(T) = 1 + \frac{Prof_{moy}(T1) * f1}{f} + \frac{Prof_{moy}(T2) * f2}{f}$$

$$Prof_{moy}(T) \geq 1 + \frac{f1 * \lceil \log_2(f1) \rceil + f2 * \lceil \log_2(f2) \rceil}{f_1 + f_2}$$

Il y a 2 manières de démontrer la dernière inégalité :

- en écrivant $f_2 = f - f_1$, on considère la fonction $f_1 \to Prof_{moy}(T)$, dont on obtient le minimum en la dérivant.
- on observe que cette fonction est concave, et le minimum obtenu pour $f_1 = f_2$, donc supérieur à $1 + \lceil \log_2(f) \rceil - 1$

□

Autre preuve : preuve de Shannon. Il y a $n!$ données, donc $\lceil \log_2(n!) \rceil$ bits d'informations à acquérir. Comme une comparaison permet d'acquérir 1 bit, il en faut au moins $\lceil log_2(n!) \rceil$ pour trier les données.

### 5.4.3 Peut-on atteindre la borne ?

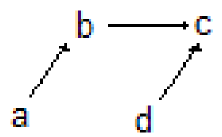
On sait qu'il faut au moins $\lceil \log_2(n!) \rceil$ comparaisons, mais cette borne est-elle atteignable ? Asymptotiquement oui, car nous avons trois algorithmes dont la complexité dans le pire des cas état en $n \log(n)$. Regardons si c'est le cas si on regarde à la comparaison près. Dans le tableau ; on note le nombre de comparaisons effectué par TriFusion, la valeur de la borne, et le nombre de comparaisons d'une solution optimale décrite plus bas :

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| TriFusion($n$) | 1 | 3 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 |
| $\lceil \log_2(n!) \rceil$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 26 | 29 |
| Opt($n$) | 1 | 3 | 5 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | 26 | 30 |

Une idée importante est l'insertion par dichotomie. Insérer un élément dans une suite triée de $k$ éléments coûte $r$ comparaisons au pire si $k \leq 2^r - 1$. Il est donc plus *avantageux* d'insérer dans une chaîne de taille 3 que de taille 2, et dans une chaîne de taille 7 que de taille 4 à 6, car le coût au pire est le même.

- trier 3 nombres :
  on en prend 2 au hasard et on compare le 3ème aux deux autres, coût 3.
- trier 4 nombres :

  - tri incrémental : on trie les 3 premiers ($a- > b- > c$), puis on insère le 4ème par dichotomie, coût 3+2=5
  - diviser pour régner :

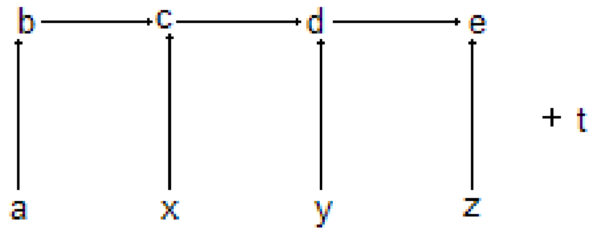
    on forme 2 paires de 2, ($a- > b$) et ($d- > c$), on compare les deux plus grands pour obtenir par exemple ($a- > b- > c$), on insère $d$ par dichotomie, coût 2+1+2=5
- trier 5 nombres :
  faire deux paires sur $a, b, c, d$ et comparer les plus grands (coût = 3) pour obtenir le même dessin que plus haut, puis on insère $e$ dans la chaîne $(a, b, c)$ (coût = 2), et on insère $d$ dans $(e, a, b)$ (si $e < a$), $(a, e, b)$ (si $e$ entre $a$ et $b$), $(a, b, e)$ (si $e$ entre $b$ et $c$), ou $(a, b)$ (si $e > c$), avec un coût 2 dans tous les cas. Il y a donc 7 comparaisons à faire.

– trier 6 nombres :
$6 = 5 + 1$ : on insère le 6ème dans les 5 premiers (coût $= 7 + 3 = 10$)

– trier 7 nombres :
$7 = 6 + 1$ : on insère le 7ème dans les 6 premiers (coût $= 10 + 3 = 13$)

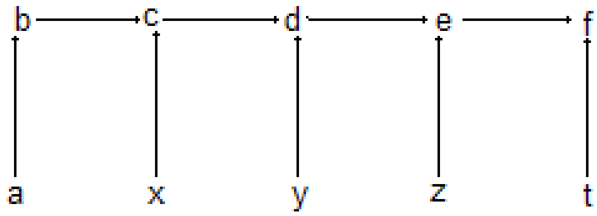
– trier 8 nombres :
$8 = 7 + 1$ : on insère le 8ème dans les 7 premiers (coût $= 13 + 3 = 16$)

– trier 9 nombres $(a, b, c, d, e, x, y, z, t)$ :




On forme 4 paires : $(a, b)$, $(x, c)$, $(y, d)$, $(z, e)$, $t$ est isolé. Coût : 4 pour former les paires. On trie $(b, c, d, e)$, coût $5 = \mathrm{Opt}(4)$. Puis on insère dans l'ordre $y$, $x$, $t$, $z$. Coûts respectifs : 2,2,3,3. Coût total : 19.

– trier 10 nombres : $(a, b, c, d, e, f, x, y, z, t)$ :




On forme 5 paires $(a, b)$, $(x, c)$, $(y, d)$, $(z, e)$, $(t, f)$ (coût 5), on trie $(b, c, d, e, f)$ (coût $7 = \mathrm{Opt}(5)$) puis on insère $y$ dans $(a, b, c)$ (coût 2), $x$ dans $(a, b, y?)$ (coût 2) puis $t$ dans une chaîne de longueur 7 (coût 3) et $z$ dans une chaîne de longueur 6 ou 7 (coût 3). Coût total 22.

– trier 11 nombres :
$11 = 10 + 1$, on utilise la méthode incrémentale.

– trier 12 nombres :
Il faut au minimum 30 comparaisons (méthode $12 = 11 + 1$), c'est impossible de le faire en 29 comparaisons, on a tous testé tous les algorithmes possibles par ordinateur ('brute force').

## 5.5 Exercices

**Exercice 5.5.1.** *Hors d'œuvre*

On considère un ensemble $S$ de $n \geq 2$ entiers distincts stockés dans un tableau ($S$ n'est pas supposé trié). Résoudre les questions suivantes :

1 - Proposer un algorithme en $\mathcal{O}(n)$ pour trouver deux éléments $x$ et $y$ de $S$ tels que $|x - y| \geq |u - v|$ pour tout $u, v \in S$.

2 - Proposer un algorithme en $\mathcal{O}(n \log n)$ pour trouver deux éléments $x$ et $y$ de $S$ tels que $x \neq y$ et $|x - y| \leq |u - v|$ pour tout $u, v \in S$, $u \neq v$.

3 - Soit $m$ un entier arbitraire (pas nécessairement dans $S$), proposer un algorithme en $\mathcal{O}(n \log n)$ pour déterminer s'il existe deux éléments $x$ et $y$ de $S$ tels que $x + y = m$.

4 - Proposer un algorithme en $\mathcal{O}(n)$ pour trouver deux éléments $x$ et $y$ de $S$ tels que $|x-y| \leq \frac{1}{n-1}(\max(S) - \min(S))$.

**Correction.**

1 - Pour que $|a-b|$ soit maximum il faut que a (Resp b) soit maximum et que b (Resp a) soit minimum. Le problème se résume donc à une recherche du min et du max qui se fait en $O(n)$.

2 - Si $|c-d|$, est minimum pour c et d appartenant à $S$ alors il n'existe pas $e$ appartenant à S tel que $a > e > b$ ou $a < e < b$ : sinon $|c-e| < |c-d|$. On trie donc $S$ en $O(n \times logn)$ et on cherche ensuite le min des $s_i - s_{i+1}$, ($s_i$ et $s_{i+1}$ étant deux entier consécutifs de $S$) en $O(n)$.On obtient donc un algorithme en $O(n \times logn)$.

3 - On commence par trier $S$ en $O(n \times logn)$.Ensuite pour tout $y$ appartenant à $S$ on cherche si $m-y$ appartient à $S$ par dichotomie ($S$ est trié), la dichotomie se faisant en $O(logn)$ cette opération ce fait en $O(n \times logn)$. A la fin on obtient bien un algorithme en $O(n \times logn)$.

4 - Il existe deux méthodes pour résoudre cette question.

4.1 - Première méthode

Cette méthode est basée sur la médiane. On note $S_1$ l'ensemble des élément de $S$ inféreurs à la médiane et $S_2$ les éléments de $S$ supérieurs à la médiane. Il est à noter que $\|S_1\| = \|S_2\| = \lceil\frac{\|S\|}{2}\rceil$.

**début**
- Calculer le min et le max de $S$ ;
- **si** $n = 2$ **alors** retourner (Min,Max) ;
- **sinon**
  - extraire la médiane de $S$; calculer $S_1$ $S_2$ ;
  - relancer l'algo sur $S_1$ ou $S_2$ suivant le cas.

**fin**

Preuve de l'algorithme : on pose $M(S)$ la moyenne pondérée de $S$, $n = \| S \|$, a le min de $S$, b le max de $S$, et $m$ la médianne de $S$, deux cas sont alors possibles :

– n impair :

$$n = 2k+1, \text{alors} \|S_1\| = \frac{n+1}{2} = k+1$$

$$\text{donc :} M(S_1) = \frac{m-a}{k+1-1} = \frac{m-a}{k}$$

$$\text{et :} \|S_2\| = \frac{n+1}{2} = k+1$$

$$\text{donc :} M(S_2) = \frac{b-m}{k+1-1} = \frac{b-m}{k}$$

$$\text{donc :} \frac{M(S_1)+M(S_2)}{2} = (\frac{m-a}{k} + \frac{b-m}{k}) \times \frac{1}{2} = \frac{b-a}{2k}$$

$$\text{or :} \frac{b-a}{2k} = \frac{b-a}{n-1} = M(S)$$

$$\text{donc :} 2 \times M(S) = M(S_1) + M(S_2)$$

$$\text{finalement :} M(S_1) \leq M(S) \text{ou} M(S_2) \leq M(S).$$

– n pair :

$$n = 2k, \text{alors} \|S_1\| = \frac{n+1}{2} = k$$

$$\text{donc :} M(S_1) = \frac{m-a}{k-1}$$

$$\text{et :} \|S_2\| = \frac{n+1}{2}$$

$$\text{donc :} M(S_2) = \frac{b-m}{k-1}$$

$$\text{donc :} \frac{M(S_1)+M(S_2)}{2} = (\frac{m-a}{k-1} + \frac{b-m}{k-1}) \times \frac{1}{2} = \frac{b-a}{2k-2}$$

$$\text{or :} \frac{b-a}{2k-2} \leq \frac{b-a}{n-1} = M(S)$$

$$\text{donc :} 2 \times M(S) \geq M(S_1) + M(S_2)$$

$$\text{finalement :} M(S_1) \leq M(S) \text{ou} M(S_2) \leq M(S).$$

Comme on sait que $M(S_1) \leq M(S)$ ou $M(S_2) \leq M(S)$ cela nous permet d'enclencher l'induction : soit sur $S_1$, soit sur $S_2$. Rechercher la moyenne se fait en $O(n)$, chercher le min et le max d'un ensemble aussi, donc :

$$C(n) = C(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + O(n)$$

Ce qui donne par master théorème

$$C(n) = O(n)$$

4.2 - Deuxième méthode

On divise $S$ en $(n-1)$ boites.

**début**

- **si** *il n'y a qu'une boite* **alors** on renvoie deux de ses éléments;
- **sinon**
  - **si** *le nombre d'éléments des* $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ *premières boites est supérieur à* $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. **alors** la moyenne pondérée sur les $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ premières boites est inférieure à celle de $S$, et on relance l'algorithme sur ces boites. ;
  - **sinon**
    - le nombre d'éléments des $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ dernières boites est supérieur à $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$, et alors la moyenne pondérée sur les $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ dernières boites est inférieure à celle de $S$, et on relance l'algorithme sur celles-ci.

**fin**

Quant à la complexité elle est en $O(n)$ :

$$C(n) = C(\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1) + O(n)$$

Ce qui donne par master théorème

$$C(n) = O(n)$$

Dans les exercices suivants, on s'intéresse à des ensembles de $n$ entiers tous distincts rangés dans un tableau $T[1],\dots,T[n]$. Les algorithmes considérés ici effectuent des **affectations** et leur seul critère de décision (ou de bifurcation) est la **comparaison** de deux éléments (= et <). En aucun cas ils ne peuvent effectuer des opérations arithmétiques, comme l'addition ou la multiplication.

**Exercice 5.5.2.** *Maximum de n entiers*

1 - Ecrire un algorithme (naïf !) qui calcule le maximum de $n$ entiers. Quelle en est la complexité (en nombre de comparaisons effectués, en nombre d'affectations effectuées, dans le pire des cas, le meilleur, en moyenne) ?

*Indications pour le calcul des affectations en moyenne :* soit $P_{n,k}$ le nombre de permutations $\sigma$ de $\{1,\dots,n\}$ telles que sur la donnée $T[1] = \sigma(1)$,...,$T[n] = \sigma(n)$ l'algorithme effectue $k$ affectations. Donner une relation de récurrence pour $P_{n,k}$. Soit $G_n(z) = \sum P_{n,k}z^k$. Montrer que $G_n(z) = z(z+1)\cdots(z+n-1)$. En déduire le résultat.

2 - L'algorithme que vous avez proposé est-il optimal pour la complexité en comparaisons dans le pire des cas ?

**Correction.**

1- On donne ici **un algorithme naïf** pour le calcul du maximum de $n$ entiers :

**début**
  max $\leftarrow T[1]$
  **pour** $i$ **de** *1* **à** $n$ **faire**
    **si** $T[i] > max$ **alors** max $\leftarrow T[i]$
  **fin**
  Retourner max
**fin**

Complexité en nombre de comparaisons : quel que soit le cas, on effectue $n-1$ comparaisons dans l'algorithme, chaque élément après le premier étant comparé une fois.

- dans le pire des cas : $n$ (si le tableau est ordonné de manière croissante),
- dans le meilleur des cas : 1 (si le maximum est en première position),
- en moyenne : pour le calcul de la complexité en moyenne, il va falloir faire appel à un calcul plus poussé :
  - **Rappel :** *complexité en moyenne d'un algorithme A de données de taille n :*

$$moy_A(n) = \sum_{\text{n données de taille m}} p(d)\text{coût}_A(d)$$

    où $p(d)$ est la probabilité que $d$ soit une entrée de l'algorithme A.
  - les données sont les permutations de [1,...,n] stockées dans T. Les permutations étant totalement aléatoires et n'étant régies par aucune loi mathématique, on peut les supposer équiprobables.
  - le coût d'un algorithme A(T) est son nombre d'affectation. Ainsi, pour chaque cas de $P_{n,k}$, l'algorthime effectue k affectations. On obtient donc ainsi que le coût d'un algorithme A(T) est de $kP_{n,k}$.
  - d'où :

$$moy_A(n) = \frac{1}{n!}\sum_{T \textit{ permutations de } [1,\dots,n]} cout_A(T) = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} kP_{n,k}$$

  - trouvons $P_{n,k}$ :

  - supposons le max en $T[n]$ : pour avoir k affectations en tout, il faut : $P_{n-1,k-1}$
  - sinon, les affectations sont réalisées avant et on a alors $n-1$ permutations possibles : $P_{n-1,k}$
  - Donc $P_{n,k} = P_{n-1,k-1} + (n-1)P_{n-1,k-1}$
- cas limites :
  - $P_{n,0} = 0$
  - si $k > n$ : $P_{n,k} = 0$
  - $\forall n \in \mathbb{N}$ : $P_{n,n} = 1$
- Utilisons les séries génératrices : $G_n(z) = \sum_{k=1}^{n} P_{n,k} z^k$

$$\begin{aligned}
G_{n+1}(z) &= \sum_{k=1}^{n+1} P_{n,k} z^k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (P_{n,k-1} + nP_{n,k}) z^k \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} P_{n,k-1} z^{k-1} + n \sum_{k=1}^{n+1} P_{n,k} z^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} P_{n,k} z^k + n \sum_{k=1}^{n+1} P_{n,k} z^k
\end{aligned}$$

Or $P_{n,0} = 0$ et $P_{n,n+1} = 0$ d'où :

$$G_{n+1}(z) = z \sum_{k=0}^{n} P\_n, kz^k + n \sum_{k=1}^{n} P_{n,k} z^k$$

d'où :

$$G_{n+1}(z) = (z+n)G_n(z)$$

Or $G_1(z) = P_{1,1}z = z$ d'où $G_n(z) = z(z+1)\ldots(z+n-1)$
- de plus :

$$\begin{aligned}
G'_n(z) &= \sum_{k=1}^{n} kP_{n,k} z^{k-1} \\
\text{d'où : } G'_n(1) &= \sum_{k=1}^{n} kP_{n,k} \\
\text{de même : } G_n(1) &= \sum_{k=1}^{n} P_{n,k} = n!
\end{aligned}$$

– On obtient donc :

$$
\begin{aligned}
moy_A(n) &= \frac{G'_n(1)}{G_n(1)} \\
&= [lnG(z)]'(1) \\
&= [\sum_{i=0}^{n-1} ln(z+i)]'(1) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \\
&= H_n \text{ (la suite harmonique à l'ordre } n)
\end{aligned}
$$

$$
moy_A(n) = O(ln\, n)
$$

2- **Optimalité en terme de comparaisons**

Une comparaison est un match entre deux entiers, le gagnant étant le plus grand. Si le max est connu, c'est que tout les autres entiers ont perdu au moins une fois un match contre lui, ce qui demande en tout $n-1$ comparaisons. Notre algorithme en faisant toujours $n-1$, il est optimal pour la complexité en nombre de comparaisons.

**Exercice 5.5.3.** *Plus petit et plus grand*

Dans l'exercice suivant, on ne s'intéresse plus qu'à la **complexité dans le pire des cas et en nombre de comparaisons** des algorithmes.

1- On s'intéresse maintenant au calcul (simultané) du maximum et du minimum de $n$ entiers. Donner un algorithme naïf et sa complexité.

2 - Une idée pour améliorer l'algorithme est de regrouper *par paires* les éléments à comparer, de manière à diminuer ensuite le nombre de comparaisons à effectuer. Décrire un algorithme fonctionnant selon ce principe et analyser sa complexité.

3 - Montrons l'optimalité d'un tel algorithme en fournissant une borne inférieure sur le nombre de comparaisons à effectuer. Nous utiliserons la méthode de l'*adversaire*.

Soit $A$ un algorithme qui trouve le maximum et le minimum. Pour une donnée fixée, au cours du déroulement de l'algorithme, on appelle *novice* (N) un élément qui n'a jamais subi de comparaisons, *gagnant* (G) un élément qui a été comparé au moins une fois et a toujours été supérieur aux éléments auxquels il a été comparé, *perdant* (P) un élément qui a été comparé au moins une fois et a toujours été inférieur aux éléments auxquels il a été comparé, et *moyens* (M) les autres. Le nombre de ces éléments est représenté par un quadruplet d'entiers $(i, j, k, l)$ qui vérifient bien sûr $i + j + k + l = n$.

Donner la valeur de ce quadruplet au début et à la fin de l'algorithme. Exhiber une stratégie pour l'adversaire, de sorte à maximiser la durée de l'exécution de l'algorithme. En déduire une borne inférieure sur le nombre de tests à effectuer.

**Correction.**

1 - On donne ici **un algorithme naïf** pour le calcul du maximum et du minimum de $n$ entiers :

**début**
max $\leftarrow T[1]$
$i_{max} \leftarrow 1$
min $\leftarrow T[1]$
**pour** $i$ **de** *2* **à** $n$ **faire**
**si** $T[i] > max$ **alors** max $\leftarrow T[i]$ ; $i_{max} \leftarrow i$
**fin**
**pour** $i$ **de** *2* **à** $n$ **faire**
**si** $i \neq i_{max}$ **et** $min < T[i]$ **alors** min $\leftarrow T[i]$
**fin**
Retourner (max,min)
**fin**

Complexité en nombre de comparaisons : On effectue $n-1$ comparaisons pour trouver le maximum, et $n-2$ pour trouver le minimum. On a donc une complexité en $2n-3$.

2 - **Groupement des éléments par paires**

On regroupe maintenant les éléments par paire pour ensuite effectuer les opérations de comparaisons.
L'algorithme suivant permet de résoudre le problème posé :

**début**
**pour** $i$ **de** *1* **à** $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ **faire**
**si** $T[2i-1] > T[2i]$ **alors** échange $T[2i-1]$ et $T[2i]$
**fin**
max $\leftarrow T[2]$
**pour** $i$ **de** *2* **à** $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ **faire**
**si** $T[2i] > max$ **alors** max $\leftarrow T[2i]$
**fin**
min $\leftarrow T[1]$
**pour** $i$ **de** *2* **à** $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ **faire**
**si** $T[2i-1] < min$ **alors** min $\leftarrow T[2i-1]$
**fin**
**si** $n$ *impair* **alors** **si** $T[n] > max$ **alors** max $\leftarrow T[n]$
**sinon si** $T[n] < min$ **alors** min $\leftarrow T[n]$
**fin**

Complexité associée :
- *si $n$ est pair*, on va avoir $\frac{n}{2}$ comparaisons pour faire les paires, $\frac{n}{2}-1$ comparaisons pour trouver le maximum et autant pour le mimimum. Dans ce cas là, la complexité vaut donc :
$$\frac{3n}{2} - 2$$
- *si $n$ est impair*, le nombre de comparaisons est inférieur ou égal à $3\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, donc inférieur ou égal à $\lceil \frac{3n}{2} \rceil - 2$.

3- **Méthode de l'***adversaire*

Cette méthode va être utilisée pour fournir une borne inférieure sur le nombre de comparaisons à effectuer et ainsi montrer l'optimalité de l'algorithme précédent.

**Définitions :**
- Novice : élément qui n'a jamais été comparé
- Gagnant : élément qui a gagné tout ses matchs

- Perdant : élément qui a perdu tout ses matchs
- Moyen : élément qui a gagné et perdu

Soit $A$ notre algorithme. On note $(i, j, k, l)$ respectivement le nombre de novices, gagnants, perdants et moyens (avec $i + j + k + l = n$).

Au début de l'algorithme, on a $(i, j, k, l) = (n, 0, 0, 0)$. A la fin, $(i, j, k, l) = (0, 1, 1, n - 1)$.

Le but de l'adversaire est de maximiser la durée de l'algorithme tout en conservant une stratégie cohérente. On peut alors donner l'ensemble des opérations résumées dans le tableau 5.5.3

| comparaison | choix | i | j | k | l |
|---|---|---|---|---|---|
| $N$ :$N$ | | $i-2$ | $j+1$ | $k+1$ | / |
| $N$ :$G$ | $G > N$ | $n-1$ | / | $k+1$ | / |
| $N$ :$P$ | $P < N$ | $n-1$ | $j+1$ | / | / |
| $N$ :$M$ | $M > N$ | $i-1$ | / | $k+1$ | / |
| | $N > M$ [1] | $i-1$ | $j+1$ | / | / |
| $G$ :$G$ | | / | $j+1$ | / | $l+1$ |
| $G$ :$P$ | $G > P$ | / | / | / | / |
| $G$ :$M$ | $G > M$ | / | / | / | / |
| $P$ :$P$ | | / | / | $k-1$ | $l+1$ |
| $P$ :$M$ | $P < M$ | / | / | / | / |
| $M$ :$M$ | | / | / | / | / |

/ représente les cas où l'entier reste inchangé.

Cherchons à donner une borne inférieure sur le nombre de tests à effectuer.
Il faut que chaque novice soit comparé au moins une fois. La comparaison la plus efficace est alors $N$ :$N$ car elle diminue le nombre de novice de deux, et il en faut au moins $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ pour atteindre le bon nombre de novices.

De plus, il faut à la fin que l'on ait $n - 2$ moyens, ce qui nécessite au moins $n - 2$ autres comparaisons.

D'où au minimum

$$n - 2 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3n}{2} \right\rceil - 2 \text{ comparaisons.}$$

La borne inférieure sur le nombre de tests à effectuer est égale à la complexité de l'algorithme précédent. On montre ainsi que ce dernier est optimal.

**Exercice 5.5.4.** *Plus grand et deuxième plus grand de $n$ entiers*

On s'intéresse dans cet exercice à la **complexité dans le pire des cas et en nombre de comparaisons** des algorithmes.

1 - Pour rechercher le plus grand et deuxième plus grand élément de $n$ entiers, donner un algorithme naïf et sa complexité.

2 - Pour améliorer les performances, on se propose d'envisager la solution consistant à calculer le maximum suivant le principe d'un *tournoi* (tournoi de tennis par exemple). Plaçons-nous d'abord dans le cas où il y a $n = 2^k$ nombres qui s'affrontent dans le tournoi. Comment retrouve-t-on, une fois le tournoi terminé, le deuxième plus grand ? Quelle est la complexité de l'algorithme ? Dans le cas général, comment adapter la méthode pour traiter $n$ quelconque ?

3 - Montrons l'optimalité de cet algorithme en fournissant une borne inférieure sur le nombre de comparaisons à effectuer. Nous utiliserons la méthode des *arbres de décision*.

3.1 - Montrer que tout arbre de décision qui calcule le maximum de $N$ entiers a au moins $2^{N-1}$ feuilles.
3.2 - Montrer que tout arbre binaire de hauteur $h$ et avec $f$ feuilles vérifie $2^h \geq f$.
3.3 - Soit $A$ un arbre de décision résolvant le problème du plus grand et deuxième plus grand de $n$ entiers, minorer son nombre de feuilles. En déduire une borne inférieure sur le nombre de comparaisons à effectuer.

**Correction.**

1 - Algorithme naïf : recherche du premier maximum, puis du second.

**début**
  $max_1 \leftarrow T[1]$;
  **pour** $i$ **allant de** 2 **à** $n$ **faire**
    **si** $T[i] > max_1$ **alors**
      $max_1 \leftarrow T[i]$;
      $posmax_1 \leftarrow i$;
  **si** $posmax_1 \neq 1$ **alors** $max_2 \leftarrow T[1]$ **sinon** $max_2 \leftarrow T[2]$;
  **pour** $i$ **allant de** 2 **à** $n$ **avec** $i \neq posmax_1$ **faire**
    **si** $T[i] > max_2$ **alors**
      $max_2 \leftarrow T[i]$;
  **retourner** $max_1$, $max_2$;
**fin**

Nombre de comparaisons :

| | |
|---|---|
| Premier maximum, sur n valeurs : | $n-1$ |
| Second maximum, sur n - 1 valeurs : | $n-2$ |
| | $2n-3$ |

2 - Cas où $n = 2^k$ :
On calcule le premier maximum à la façon d'un tournoi de tennis. On cherche ensuite le second maximum, en prenant le maximum parmi les adversaires que le premier à rencontré. Ainsi, dans l'arbre donné à la figure 5.2, le second maximum est nécessairement un élément contenu dans le chemin rouge.

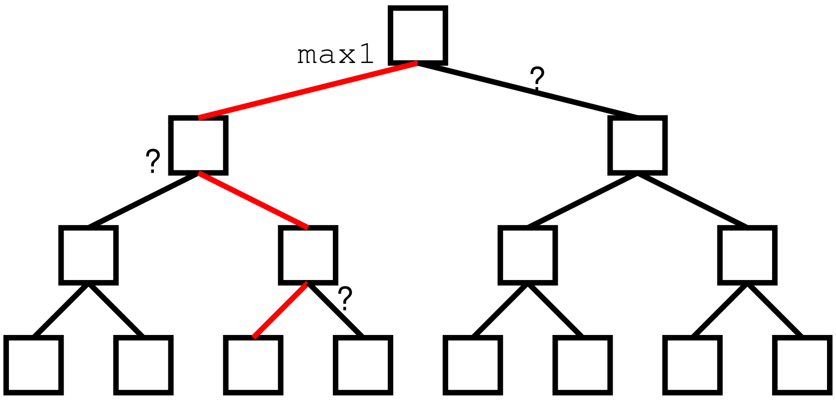



FIG. 5.2 – Arbre des «compétitions» effectuées

$$\begin{array}{lll} & \text{Premier maximum :} & n-1 = 2^k - 1 \\ \text{Nombre de comparaisons :} & \text{Second maximum :} & k-1 \\ \hline & & 2^k + k - 2 = n + log_2 n - 2 \end{array}$$

Cas général : n quelconque
S'il n'est pas rempli et a une profondeur minimale, la branche de longueur maximale est de longueur $\lceil log_2 n \rceil$.
Au pire, nombre de comparaisons :

$$\begin{array}{ll} \text{Premier maximum :} & n-1 \\ \text{Second maximum :} & \lceil log_2 n \rceil - 1 \\ \hline & n + \lceil log_2 n \rceil - 2 \end{array}$$

3.1 - Pour chercher le maximum parmis $N$ valeurs, on doit effectuer $N-1$ comparaisons. On a donc $2^{N-1}$ feuilles dans l'arbre de décision.

3.2 - Par récurrence sur la hauteur $h$ de l'arbre

- Pour $h = 0$ : 1 feuille au plus
- On considère un arbre de hauteur $h+1$ , on a alors deux cas, soit la racine a un seul fils soit il en a deux.
  - un fils : on alors le nombre de feuille qui correspond à celui de l'arbre partant du fils, qui est de hauteur $h$ , et $2^(h+1) \geq 2^h$ ce qui va bien.
  - deux fils : on a alors le nombre de feuilles qui correspond à la somme de celles des deux sous arbresz partants des deux fils : $f = f_1 + f_2$, en ayant pour chacun une hauteur maximale de h soit : $2^(h+1) \geq 2^h + 2^h \geq 2^{h_1} + 2^{h_2} \geq f_1 + f_2 \geq f$ cqfd.

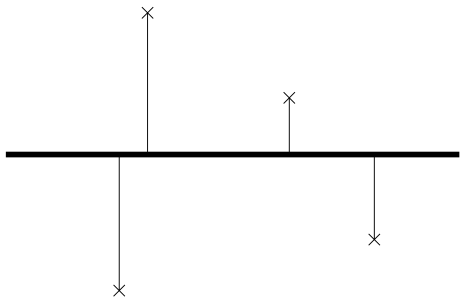
3.3 - On partitionne les feuilles de $A$ selon la valeur du premier maximum pour former les $A_i$ ; $A_i$ est au final l'arbre $A$ dont on a enlevé tous ce qui n'aboutissait pas à une feuille concluant que le premier maximum était $i$. Ces $A_i$ sont des arbres donnant un maximum parmi n-1 éléments donc ils ont chacun un nombre de feuilles tel que : nombre de feuilles de $A_i \geq 2^{n-2}$ Donc en considérant $A$ comme la 'fusion' de ces arbres qui en forme une partition, on a :

$$\begin{aligned} nombredefeuillesdeA &\geq \sum_{i=1}^{n} 2^{n-2} \\ &\geq n2^{n-2} \\ 2^{hauteur} &\geq n2^{n-2} \\ hauteur &\geq \lceil \log_2(n2^{n-2}) \rceil \\ &\geq n - 2 + \lceil \log_2 n \rceil \end{aligned}$$

**Exercice 5.5.5.** *Du pétrole et des idées*

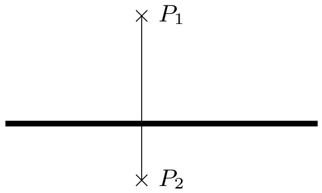
Le professeur Robert Ive est consultant pour une compagnie pétrolière qui projette de construire un grand oléoduc en ligne droite d'Est en Ouest à travers un champ pétrolier. À partir de chaque puits un raccordement doit être connecté directement sur l'oléoduc principal suivant le plus court chemin. Connaissant les coordonnées des puits, comment le professeur trouvera-t'il l'emplacement idéal de l'oléoduc principal qui minimise la longueur totale des raccordements ?

**Correction.**



Idée simplificatrice : projeter tous les puits sur l'axe Nord-Sud.

Avec deux points seulement, la longueur totale des raccordements est minimale si l'oléoduc passe entre les puits, ou même sur l'un des puits :




Soit $y_k$ l'ordonnée de $P_k$. L'altitude optimale de l'oléoduc est le médian est $y_k$. La chose est supposée assez évidente pour se dispenser de la prouver.

Si le nombre $n$ de puits est pair, on a le choix entre deux médians : inférieur ou supérieur. Si $n$ est impair, l'oléoduc passe par le puit médian.

## Exercice 5.5.6. *Médian pondéré*

Soient $n$ éléments distincts $x_1, ..., x_n$ de poids positifs $p_1, ..., p_n$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Le *médian pondéré (inférieur)* est l'élément $x_k$ satisfaisant :

$$\sum_{x_i < x_k} p_i < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{x_i > x_k} p_i \leq \frac{1}{2}$$

1 - Démontrer que le médian de $x_1, ..., x_n$ est le médian pondéré des $x_i$ affectés des poids $p_i = 1/n$ pour $i$ compris entre 1 et $n$.

2 - Comment calculer *simplement* le médian pondéré de $n$ éléments. Donner la complexité en comparaisons et en additions.

3 - Comment calculer le médian pondéré en temps linéaire dans le pire des cas.

**Correction.**

1 - On cherche à calculer le médian des $x_k$.

$\sum_{x_i<x_k} p_i < \frac{1}{2}$ et $\sum_{x_i>x_k} p_i \leq \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \frac{k-1}{n} < \frac{1}{2}$ et $\frac{n-k}{n} \leq \frac{1}{2}$

$\Longrightarrow k-1 < \frac{n}{2}$ et $n-k \leq \frac{n}{2}$

$\Longrightarrow \frac{n}{2} \leq k < \frac{n}{2}+1$

$\Longrightarrow k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ c'est le médian inférieur.

2 - Algorithme simple de calcul du médian pondéré

**début**
- Trier les éléments : $x_{\sigma(1)} < \cdots < x_{\sigma(n)}$ ;
- Sommer les poids $p_{\sigma(k)}$ jusqu'à avoir : $p_{\sigma(1)} + \cdots + p_{\sigma(k+1)} \geq \frac{1}{2}$ ;
- $k$ est alors le médian pondéré ;

**fin**

Complexité :

$(n \log n)$ comparaisons à cause du tri

$(n)$ additions dans la sommation

3 - Algorithme en temps linéaire de calcul du médian pondéré

**début**
- Poser $E = \{ (x_i, p_i) \}$ ;
- **si** $|E| = 1$ **alors** terminé : renvoyer $x_1$ ;
- Calculer le médian $x$ des $x_i$, noter $p$ son poids ;
- Construire $E_1 = \{ (x_i, p_i) \ / \ x_i < x \}$ ;
- Construire $E_2 = \{ (x_i, p_i) \ / \ x_i > x \}$ ;
- Calculer $S_1 = \sum_{E_1} p_i$ ;
- **si** $S_1 > \frac{1}{2}$ **alors**
  - relancer l'algorithme sur $E_1$ ;
- **sinon**
  - relancer l'algorithme sur $E_2 \cup \{ (x, p + S_1 \}$ ;
- **fin**
- $k$ est alors le médian pondéré ;

**fin**

Lorsque l'algorithme est relancé, il faut réajuster tous les poids pour que leur somme fasse toujours 1.

Calcul de $I(n)$, complexité d'une itération de l'algorithme, sans récursivité :
- Le calcul du médian non pondéré s'effectue en $(n)$
  (cf. cours : algorithme faisant des paquets de cinq).
- Les autres opérations s'effectuent en $(n)$ également.

$\Longrightarrow I(n) = (n)$

Complexité totale : $T(n) = T(\frac{n}{2}) + I(n) = T(\frac{n}{2}) + (n)$

On peut alors appliquer le Master Theorem :

| | |
|---|---|
| Notations : | $T(n) = a\,T(\frac{n}{b}) + (n^\alpha)$ |
| Valeurs : | $a = 1$ ; $b = 2$ ; $\alpha = 1$ |
| Cas : | $1 = a < b^\alpha = 2$ |
| Conclusion : | $T(n) = (n^\alpha) = (n)$ |

$T(n) = (n)$ et on a donc un algorithme linéaire pour calculer le médian pondéré.

**Exercice 5.5.7.** *Le problème de l'emplacement du bureau de poste*

Considérons un espace métrique $(E,d)$. Soient $n$ éléments distincts $x_1,...,x_n$ de poids respectifs $p_1,...,p_n$ tels que

$$\forall i,\ p_i \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

On souhaite trouver un point $x$ (qui n'est pas nécessairement un des $x_i$) qui minimise $\sum_{i=1}^{n} p_i d(x,x_i)$.

1 - **Cas de la dimension 1 :** $(E,d)$ est l'ensemble des réels muni de la distance usuelle. Montrer que le médian pondéré est une des solutions optimales.

2 - **Cas de la dimension 2 :** $(E,d)$ est le plan muni de la distance 1, ou *distance Manhattan*, c'est à dire :

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Résoudre l'énoncé qui s'appelle dans ce cas «problème du bureau de poste».

**Correction.**

On suppose les $x_i$ triés tels que $x_1 < \cdots < x_n$.

1 - Il est évident que $x \in [\, x_1\ ;\ x_n\,]$.
On note $x_m$ le médian pondéré des $(x_i,p_i)$.

Soit $x \in [\, x_i\ ;\ x_{i+1}\,]$ et $\epsilon > 0$ avec $x+\epsilon \in [\, x_i\ ;\ x_{i+1}\,]$.
La situation est la suivante : $x_i \leq x < x+\epsilon \leq x_{i+1}$

$S(x) = \sum_{k=1}^{n} p_i\, |x - x_i|$
La définition de $x$ impose que $S(x)$ soit minimal.

$$S(x) = \textstyle\sum_{x_k < x} p_k\,(x - x_k) + \sum_{x < x_k} p_k\,(x_k - x)$$

$$\begin{aligned}
S(x+\epsilon) &= \textstyle\sum_{x_k \leq x} p_k\,(x+\epsilon-x_k) + \sum_{x_k > x} p_k\,(x_k - x - \epsilon) \\
&= S(x) + \epsilon\left(\textstyle\sum_{x_k \leq x} p_k - \sum_{x_k > x} p_k\right) \\
&= S(x) + \epsilon\left(\textstyle\sum_{x_k \leq x} p_k + \sum_{x_k \leq x} p_k - 1\right) \qquad \text{car :} \quad \textstyle\sum_{k=1}^{n} p_k = 1
\end{aligned}$$

$$S(x+\epsilon) = S(x) + \underbrace{\epsilon}_{>0}\left(2\textstyle\sum_{x_k \leq x} p_k - 1\right)$$

$$S(x+\epsilon) < S(x) \iff \textstyle\sum_{x_k < x_{i+1}} p_k < \frac{1}{2}$$

Si $x < x_{i+1} < x_m$ alors $\sum_{x_k < x_{i+1}} p_k < \sum_{x_k < x_m} p_k < \frac{1}{2} \implies S(x+\epsilon) < S(x)$
$\implies S(x)$ n'est pas minimal donc $x$ n'est pas un médian pondéré.

On en déduit : $x \geq x_m$.

En posant $\epsilon < 0$, on montre avec un raisonnement similaire que $x \leq x_m$, ce qui permet de conclure : $x = x_m$. Corrolaire : l'exercice 2 n'a pas servi à rien !

2 - On calcule indépendamment $x_k$ médian sur les $x$, et $y_l$ médian sur les $y$.
La solution au problème est le point $(x_k, y_l)$.

Note 1 : ne pas commettre l'erreur de se limiter au calcul d'un seul médian et de déclarer solution le point $(x_k, y_k)$. En dimension 2, le point solution n'est pas toujours confondable avec un des $P_k$ comme c'était le cas dans la question précédente.

Note 2 : cette solution simple convient car on utilise la distance de Manhattan. Elle ne fonctionnerait pas avec la distance usuelle $d(A,B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

**Exercice 5.5.8.** *Un nouvel algorithme de tri*

Soit $T$ un tableau contenant $n$ entiers distincts, la procédure `Nouveau_Tri` est définie de la manière suivante :

`Nouveau_Tri` $(T,i,j)$
| `si` $T[i] > T[j]$ `alors` échanger les valeurs $T[i]$ et $T[j]$ ;
| `si` $i \leq j-2$ `alors faire`
|     $k \leftarrow \lfloor (j-i+1)/3 \rfloor$ ;
|     `Nouveau_Tri`$(T, i, j-k)$ ;
|     `Nouveau_Tri`$(T, i+k, j)$ ;
|     `Nouveau_Tri`$(T, i, j-k)$ ;

1 - Montrer que `Nouveau_Tri`$(T, 1, n)$ trie correctement le tableau $T$.

2 - Donner la complexité en nombre de comparaisons de cet algorithme. Comparer avec les complexités des algorithmes de tri vus en cours (*Rappel :* $\ln(2) \simeq 0,7$ et $\ln(3) \simeq 1,1$).

**Correction.**

1 - L'algorithme trie correctement.

- Pour une longueur inférieure à deux l'algo est réduit à l'échange ce qui donne un tableau trié.
- Pour i supérieur à trois la première ligne ne sert à rien. On notera $X \leq Y$ si $\forall x \in X$ $\forall y \in Y : x \leq y$. On pose $l = \|T\|$,on pose $A$ l'ensemble des $(\lfloor \frac{l+1}{3} \rfloor)$ premier élément de T, $C$ l'ensemble des $(\lceil \frac{l}{3} \rceil)$ élément suivants , on pose $B$ l'ensemble des $(\lfloor \frac{l}{3} \rfloor)$ dernier élément. On commence par trier les éléments de $A \cup C$ par induction : comme $\|A \cup C\| = (\lceil \frac{2l}{3} \rceil) < l$. Donc on obtient $A < C$. On trie maintenant $C \cup B$ par induction : comme $\|A \cup B\| \leq (\lceil \frac{2l}{3} \rceil) < l$.Alors $\|B\| \leq \|C\|$ ce qui implique que si un élément $b$ de $B$ avant le tri se retrouve dans $B$ après, c'est qu'il existe un élément $c$ dans $C$ avant le tri tel que $c < b$ or comme $c$ est supérieur à tous les éléments de $A$ $b$ aussi donc après le tri $C \leq B$ et $A \leq B$ ou encore $C \cup A \leq B$. Finalement on retrie $A \cup C$ et on obtient $A < B < C$ avec $A$, $B$, $C$, trié donc $T$ est trié.

2 - Complexité

Pour trier un ensemble de $n$ ($n$ supérieur à trois) éléments on trie trois ensembles à $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ éléments et on fait un échange. Pour trier un ensemble de 2 éléments on fait un échange. Donc :

$$C(n) = 1 + C(\lceil \tfrac{2n}{3} \rceil) \text{ et } C(1) = 2$$

donc par master théorème :

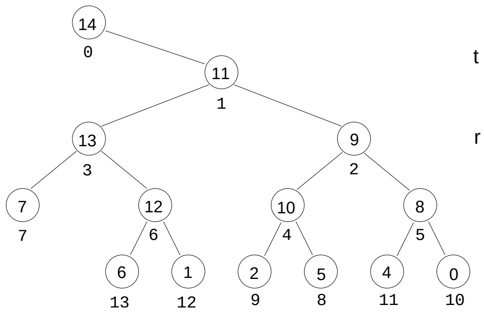
$$C(n) = O(n^{log_{\frac{3}{2}}(3)}) \simeq O(n^{2,75})$$

C'est mauvais.

**Exercice 5.5.9.** *Tas faibles & tri*

Une technique classique de tri par comparaisons consiste à utiliser la structure de données appelée *tas binaire*. Le tri correspondant a une complexité totale en $2n\log_2(n)+O(n)$ comparaisons pour $n$ éléments. L'objectif de cet exercice est d'étudier une variante de cette structure de données, les *tas faibles*, pour améliorer la complexité et se rapprocher de la borne inférieure théorique.

Un *tas faible* pour $n$ éléments est un arbre binaire où chaque nœud est étiqueté par un élément, et qui vérifie les conditions suivantes :
$(i)$ Les éléments du sous-arbre droit de chaque nœud sont inférieurs ou égaux à l'élément associé au nœud.
$(ii)$ La racine de l'arbre n'a pas de fils gauche.
$(iii)$ Les feuilles se trouvent uniquement sur les deux derniers niveaux de l'arbre.




| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| t | 14 | 11 | 9 | 13 | 10 | 8 | 12 | 7 | 5 | 2 | 0 | 4 | 1 | 6 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| r | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |

FIG. 5.3 – Exemple de tas faible et un codage de cet arbre.

Pour coder cette structure de données, nous utiliserons deux tableaux $t[0..n{-}1]$ et $r[0..n{-}1]$. Le tableau $t$ contiendra les $n$ éléments et le tableau $r$ est un tableau de bits 0 ou 1 (qui permettra de distinguer fils gauche et fils droit d'un nœud, et ensuite de les permuter à faible coût). Plus précisément, avec le tableau $t$, le fils gauche de l'élément d'indice $i$ a pour indice $2i+r[i]$ et son fils droit a pour indice $2i+1-r[i]$ (on fixe juste $r[0]=0$ pour que la racine d'indice 0 ait un unique fils qui soit à droite). Changer le bit $r[i]$ revient alors à échanger fils droit et fils gauche de l'élément d'indice $i$ et donc permuter le sous-arbre droit et le sous-arbre gauche de cet élément. La figure 5.3 présente un exemple de tas faible et de codage de cet arbre.

Les successeurs d'un nœud sur la *branche gauche* du *sous-arbre droit* sont appelés ses *petits-fils*. Par exemple sur la figure 5.3, les petits-fils de la racine sont les éléments 11, 13 et 7. On note `Pere(`$i$`)` l'indice du père du nœud d'indice $i$, et la fonction `Gpere(`$i$`)` (pour *Grand-père*) définie par `Gpere(Pere(`$i$`))` si $i$ est le fils gauche de `Pere(`$i$`)` et par `Pere(`$i$`)` si $i$ est le fils droit de `Pere(`$i$`)`. Par exemple avec le codage de la figure 5.3 le nœud d'indice 9 (de valeur $t[9]=2$) a pour grand-père `Gpere(9)`$=1$ (indice du nœud avec la valeur $t[1]=11$).

1 - Pour le codage de l'arbre avec les tableaux $t$ et $r$, écrire précisément la fonction `Gpere(`$i$`)` qui calcule l'indice du grand-père de l'élément d'indice $i$ dans $t$.

Soit `echange(`$i$`,`$j$`)` une fonction qui échange les valeurs de $t[i]$ et $t[j]$. Soit `fusion(`$i$`,`$j$`)` la fonction définie par : `si` $(t[i]>t[j])$ `alors echange(`$i$`,`$j$`) et` $r[i]\leftarrow 1-r[i]$.

2 - Etant donné un tableau de $n$ valeurs $t[0..n{-}1]$, on lui associe le tableau $r=[0,0,\ldots,0]$ où tous les bits sont à 0, et on effectue la fonction `ConstruitTas(`$t$`,`$r$`)` définie par :

`pour` $i$ `de` $n-1$ `à 1, faire fusion(`$i$`,Gpere(`$i$`))`

Montrer que pendant le déroulement de la boucle, après avoir effectué `fusion(`$i$`,Gpere(`$i$`))`, alors pour tout $j \geq i$, les valeurs du sous-arbre de racine le nœud d'indice $j$ sont toutes inférieures ou égales à la valeur du nœud d'indice `Gpere(`$j$`)`. En déduire qu'en fin de boucle, on obtient un tas faible. Combien de comparaisons a-t-on effectué ?

3 - Etant donné un tas faible représenté par les tableaux $t$ et $r$, supposons que l'on remplace la valeur $t[0]$ de la racine par une valeur quelconque, comment reconstruire rapidement un tas faible avec cette valeur et à quel coût en nombre de comparaisons ?

*Indication :* mettre à jour en parcourant les petits fils de la racine.

4 - En déduire un algorithme de tri d'un tableau $t$ en $n \log_2(n) + \mathcal{O}(n)$ comparaisons, qui commence par construire un tas faible puis exploite cette structure de données.

**Correction.**

À Faire.

# Chapitre 6

# Graphes

## 6.1 Définitions

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté, où $V$ est l'ensemble des sommets et $E$ l'ensemble des arêtes. On rappelle quelques définitions élémentaires :

**Degrés** Le degré $\delta(v)$ d'un sommet $v \in V$ est le nombre d'arêtes de $E$ incidentes en $v$. Le degré $\Delta(G)$ du graphe $G$ est le maximum des degrés d'un sommet.

**Chemin** Soient $u, v$ deux sommets de $V$. Un chemin de $u$ à $v$ est un ensemble d'arêtes $e_1, e_2, \ldots, e_k$ de $E$ telles que $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, $v_0 = u$ et $v_k = v$. Si tous les $v_i$ sont distincts, le chemin est élémentaire. Si $u = v$, le chemin (élémentaire) est un cycle (élémentaire).

**Composantes connexes** Une composante connexe est une classe d'équivalence de la relation $R$ définie sur $V \times V$ par $uRv$ si et seulement s'il existe un chemin de $u$ à $v$.Le graphe $G$ est connexe si tous les sommets sont dans la même composante connexe.

**Sous-graphe** Un sous-graphe de $G$ est un graphe $(W, F)$ où $W \subset V$, $T \subset E$, et toutes les arêtes de $F$ relient deux sommets de $W$. Le sous-graphe induit par un sous-ensemble de sommets comprend *toutes* les arêtes qui ont leurs deux extrémités dans ce sous-ensemble. De même pour le sous-graphe induit par un sous-ensemble d'arêtes.

Dans le cas orienté, on parle d'arcs au lieu d'arêtes. On définit le degré sortant et le degré entrant d'un sommet. Deux sommets $u$ et $v$ sont dans une même composante connexe s'il existe un chemin de $u$ à $v$ et un chemin de $v$ à $u$. Pour bien distinguer du cas non-orienté, on parle plutôt de composante fortement connexe.

## 6.2 Arbres

### 6.2.1 Caractérisation

**Définition 5.** *Un arbre est un graphe connexe sans cycle.*

**Théorème 11.** *Soit $G$ un graphe à $n$ sommets et $m$ arêtes. On a l'équivalence :*

1. *$G$ est connexe sans cycle (définition d'un arbre)*
2. *$G$ est connexe et minimal pour cette propriété (si on supprime une arête, $G$ n'est plus connexe)*
3. *$G$ est connexe et $m = n - 1$*
4. *$G$ est sans cycle et maximal pour cette propriété (si on ajoute une arête, $G$ a un cycle)*
5. *$G$ est sans cycle et $m = n - 1$*

6. *Toute paire de sommets est reliée par un chemin élémentaire et un seul*

**Preuve**. La preuve est facile. Tout repose sur la construction suivante. On part des $n$ sommets, sans aucune arête. Il y a alors $n$ composantes connexes, une par sommet. On ajoute les arêtes une par une. Quand une ajoute une nouvelle arête, il y a deux cas :

- Soit cette arête relie deux sommets qui n'étaient pas dans la même composante connexe. Les composantes connexes de ces deux sommets fusionnent, et le nombre total de composantes connexes diminue d'une unité.
- Soit cette arête relie deux sommets qui étaient déjà dans une même composante connexe. Elle crée un cycle (avec le chemin qui reliait les deux sommets). Le nombre total de composantes connexes reste inchangé.

On voit en particulier que pour passer de $n$ composantes connexes à une seule, il faut au moins $n - 1$ arêtes, et qu'aucune de celles-ci en crée de cycle.

Ce bout de preuve permet de montrer *proprement* que trouver le maximum de $n$ éléments dans un ensemble muni d'une relation d'ordre total exige de faire au moins $n - 1$ comparisons. En effet, on ajoute une arête entre deux éléments qu'on compare. S'il reste deux (ou plus) composantes connexes à la fin, le maximum peut se trouver dans n'importe laquelle.

□

### 6.2.2 Parcours d'arbres binaires

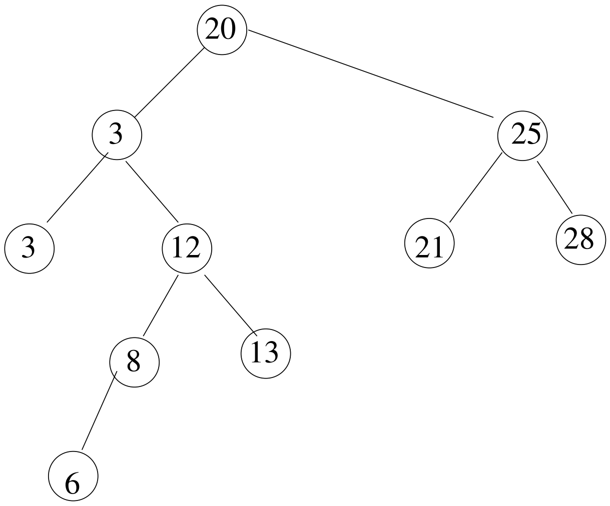
Il y a trois parcours classiques en profondeur :

**Préfixe** (père, fils gauche, fils droit)

**Postfixe** (fils gauche, fils droit, père)

**Infixe** (fils gauche, père, fils droit)

Par contre, le parcours en largeur est un parcours niveau par niveau, de la racine jusqu'aux feuilles. C'est une exploration "hiérarchique" de l'arbre. Considérons l'exemple :




Pour cet exemple, si on imprime le numéro du sommet *père* au moment où on le visite, on trouve :

**Préfixe** 20, 3, 3, 12, 8, 6, 13, 25, 21, 28

**Postfixe** 3, 6, 8, 13, 12, 3,21, 28, 25, 20

**Infixe** 3, 3, 6, 8, 12, 13, 20, 21, 25, 28

**Largeur** 20, 3, 25, 3, 12, 21, 28, 8, 13, 6

On donne ci-dessous des programmes Java pour tous ces parcours.

### Parcours préfixe

```
class Arbre {
  int      contenu;
  Arbre    filsG;
  Arbre    filsD;

  Arbre (int v, Arbre a, Arbre b) {
      this.contenu = v;
      this.filsG = a;
      this.filsD = b;
  }

  static int taille(Arbre a) {
    if (a == null)
        return 0;
    else
        return 1 + taille (a.filsG) + taille (a.filsD);
  }

  static Arbre nouvelArbre(int v, Arbre a, Arbre b) {
      return new Arbre (v, a, b);
  }

  public static void main(String args[]) {
    Arbre a5, a7;
    a5 = nouvelArbre (12, nouvelArbre (8, nouvelArbre (6, null, null), null),
                          nouvelArbre (13, null, null));
    a7 = nouvelArbre (20, nouvelArbre (3, nouvelArbre (3, null, null), a5),
                          nouvelArbre (25, nouvelArbre (21, null, null),
                                           nouvelArbre (28, null, null)));
   prefixe(a7);
  }

  static void prefixe(Arbre a) {
    if (a==null) return;
    System.out.println(a.contenu+" ");
    prefixe(a.filsG);
    prefixe(a.filsD);
  }
}
```

### Les trois parcours en profondeur

```
class Arbre {
...
```

```
  // parcours préfixe P G D
  static void prefixe(Arbre a) {
    if (a==null) return;
    System.out.println(a.contenu+" ");
    prefixe(a.filsG);
    prefixe(a.filsD);
  }

  // parcours postfixe G D P
  static void postfixe(Arbre a) {
    if (a==null) return;
    postfixe(a.filsG);
    postfixe(a.filsD);
    System.out.println(a.contenu+" ");
  }

  // parcours infixe G P D
  static void infixe(Arbre a) {
    if (a==null) return;
    infixe(a.filsG);
    System.out.println(a.contenu+" ");
    infixe(a.filsD);
  }
}
```

**En profondeur (préfixe) avec une pile**

```
   static void prefixeIter(Arbre a) {
     if (a==null) return;
     Pile P = new Pile();
     P.push(a);
     while (!P.estVide()) {
         a = P.pop(); // imprime a.contenu
         if (a.filsD != null) P.push(a.filsD);
         if (a.filsG != null) P.push(a.filsG);
  }
```

**En largeur avec une file**

```
   static void largeurIter(Arbre a) {
     if (a==null) return;
     File F = new File();
     F.fush(a);
     while (!F.estVide()) {
         a = F.pop(); // imprime a.contenu
         if (a.filsG != null) F.fush(a.filsG);
         if (a.filsD != null) F.fush(a.filsD);
  }
```

### 6.2.3 Arbres binaires de recherche

Dans un arbre binaire de recherche, on impose un ordre partiel sur les contenus : les nœuds du sous-arbre gauche (resp : droit) ont une valeur inférieure ou égale (resp : supérieure) à la valeur du père :

$$\text{valeur[sous-arbre gauche]} \leq \text{valeur[nœud]} < \text{valeur[sous-arbre droit]}$$

On veut que les procédures de recherche, d'insertion d'un nouveau nœud, et de suppression d'un nœud, aient un coût proportionnel à la hauteur de l'arbre. C'est facile pour les deux premières, mais cela demande une analyse plus fine pour la suppression : comment reconstruire l'arbre ? Voici la méthode :

- Pour supprimer la clé $x$ de l'arbre $a$, on cherche d'abord le sommet $s$ dont la clé vaut $x$.
- Quand on l'a trouvé, il faut disposer d'une méthode pour supprimer la racine du sous-arbre de $s$ :
  1. Si $s$ n'a qu'un fils unique, on le remplace par celui-ci.
  2. Sinon, il faut chercher le sommet $t$ qui est le prédécesseur de la racine (au sens de l'ordre sur les clés). On remplace alors la clé de $s$ par celle de $t$, et on supprime $t$.
- Lemme : $t$ n'a pas de fils droit.
- Le prédécesseur est donc le "dernier" fils droit en descendant la chaîne à partir du fils gauche de la racine.

On donne ci-dessous des programmes Java pour les trois opérations.

#### Recherche

```
  static Arbre recherche(int v, Arbre a) {
   if (a == null || v == a.contenu)
        return a;
   else
        if (v < a.contenu)
            return recherche(v, a.filsG);
        else
            return recherche(v, a.filsD);
}

static boolean estDans(int v, Arbre a) {
   return (recherche(v,a) != null);
}
```

#### Insertion

```
static Arbre ajouter(int v, Arbre a) {
   if (a == null)
       a = nouvelArbre(v, null, null);
   else if (v <= a.contenu)
      a.filsG = ajouter(v, a.filsG);
  else
      a.filsD = ajouter(v, a.filsD);
  return a;
}
```

```
static Arbre ajouterSansModif(int v, Arbre a) {
   if (a == null)
       a = nouvelArbre(v, null, null);
   else if (v <= a.contenu)
      return nouvelArbre(v, ajouter(v, a.filsG), a.filsD);
  else
      return nouvelArbre(v, a.filsG, ajouter(v, a.filsD));
}
```

### Suppression

```
static Arbre supprimer(int v, Arbre a) {
   if (a == null) return a;
   if (v == a.contenu)
       return eliminerRacine(a);
   if (v < a.contenu)
       a.filsG = supprimer(v, a.filsG);
   else
       a.filsD = supprimer(v, a.filsD);
   return a;
}

static Arbre dernierFils(Arbre a) {
   if (a.filsD == null)
       return a;
   else
       return dernierFils(a.filsD);
}

static Arbre eliminerRacine(Arbre a) {
   if (a.filsG == null)
       return a.filsD;
   if (a.filsD == null)
       return a.filsG;
   Arbre b = dernierFils(a.filsG);
   a.contenu = b.contenu;
   a.filsG = supprimer(a.contenu, a.filsG);
   return a;
}
```

### Version itérative de la suppression

```
static Arbre supprimerI(int v, Arbre a) {
   if (a == null) return a;
   if (v == a.contenu)
       return eliminerRacineI(a);
   if (v < a.contenu)
       a.filsG = supprimerI(v, a.filsG);
   else
```

```
        a.filsD = supprimerI(v, a.filsD);
    return a;
}

static Arbre eliminerRacineI(Arbre a) {
    if (a.filsG == null)
        return a.filsD;
    if (a.filsD == null)
        return a.filsG;
    Arbre g = a.filsG;
    Arbre h = g.filsD;
    if (h == null) { // g n'a pas de fils droit
        a.contenu = g.contenu; // transfert de clé
        a.filsG = g.filsG; // suppression de g
        return a;
    }
    while (h.filsD != null) { // descente branche droite
        g = h;
        h = h.filsD; // h fils droit de g
    }
    a.contenu = h.contenu; // transfert de clé
    g.filsD = h.filsG; // suppression de h
    return a;
}
```

Pour terminer avec les arbres de recherche, voici un petit exercice. Soit $A$ un arbre de recherche. Montrer que :

1. Le parcours infixe ordonne les noeuds par valeur croissante.
2. Si un noeud a deux fils, son successeur dans l'ordre infixe n'a pas de fils gauche et son prédécesseur (dans l'ordre infixe) n'a pas de fils droit.
3. Montrer que le successeur d'un noeud $n$ est le sommet le plus à gauche dans le sous-arbre droit issu de $n$.

## 6.3 Structures de données pour les graphes

Pour représenter un graphe en machine, plusieurs structures de données sont utilisées, notamment matrices ou listes de successeurs. La complexité des algorithmes dépendra de la représentation choisie, d'où la nécessité de la choisir soigneusement.

Dans cette section, on utilise les notations suivantes :
- $G = (V, E)$, $V$ sommets et $E$ arêtes (ou arcs dans le cas orienté),
- Le nombre de sommets est $n = |V|$,
- Le nombre d'arêtes est $m = |E|$ $(m = O(n^2))$.

**Matrice d'adjacence**
- $M_{i,j} = \begin{cases} O & \text{si } (i,j) \notin E \\ 1 & \text{si } (i,j) \in E \end{cases}$
- $M$ est symétrique si le graphe est non-orienté
- Utilisation : accessibilité, plus courts chemins (propriétés globales du graphe).

**Matrice d'incidence**

- Pour un graphe orienté sans boucle
- Taille $n \times m$
- $M_{i,a} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est l'origine de } a \\ -1 & \text{si } i \text{ est l'extrémité de } a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- Utilisation : branchements, programmation linéaire
- Exercice : $M$ est totalement unimodulaire : le déterminant de toute sous-matrice carrée de $M$ vaut 0, 1 ou $-1$.

**Listes de successeurs**

- Pour chaque sommet, la liste de ses successeurs
- On a un tableau de taille $n$ pour les débuts de liste
- Deux variantes :
  - GrapheSucc si tous les sommets ont à peu près le même nombre de sucesseurs : on stocke ceux-ci dans un tableau, avec une sentinelle Omega = -1 pour marquer le dernier successeur
  - GrapheListe une vraie structure de liste
- Utilisation : parcours dans tous les sens, connexité

**Structures de données en Java**

```
class GrapheMat {
  int m[][];
  int nb;

  GrapheMat(int n1) {
  // Initialisation: n1 sommets, matrice vide
      nb = n1;
      m = new int[n1][n1];
  }

  GrapheMat (int n1, int p) {
  // Initialisation: n1 sommets, matrice
  // Pour un arc entre i et j:  proba 1/p d'exister
      nb = n1;
      m = new int[n1][n1];
      for (int i = 0; i < nb; ++i)
        for (int j = 0; j < nb; ++j) {
          int a  = (int) (Math.random() * p);
          if (a == p - 1 ) m[i][j] = 1;
            else m[i][j] = 0;
        }
  }

  static void imprimer (GrapheMat g) {
      System.out.println ("nombre de sommets " + g.nb);
      for (int i = 0; i < g.nb ; ++i) {
          for (int j = 0; j < g.nb; ++j)
              System.out.print (g.m[i][j] + " ");
```

```
          System.out.println ();
       }
       System.out.println ();
   }
}


class GrapheSucc{
  int succ[][];
  int nb;
  final static int Omega = -1;

  GrapheSucc(int n) {
      nb = n;
      succ = new int[n][n];
  }

  static void imprimer(GrapheSucc g) {
     System.out.println ("nombre de sommets " + g.nb + " ");
     for (int i = 0; i < g.nb; ++i)
       { System.out.println ("sommet " + i + ", : successeurs: ");
         for (int j = 0; g.succ[i][j] != Omega; ++j)
         System.out.print (g.succ[i][j] +" ");
         System.out.println ();
       }
     System.out.println();
  }
}


class GrapheListe{
  Liste listeSucc[];
  int nb;

  GrapheListe (int n1) {
      nb = n1;
      listeSucc = new Liste[n1];
  }

  static void imprimer (GrapheListe g) {
      System.out.println ("nombre de sommets " + g.nb);
      for (int i = 0; i < g.nb; ++i) {
          System.out.println ("sommet " + i + ", : successeurs: ");
          for (Liste u = g.listeSucc[i]; u != null; u = u.suivant)
              System.out.print (" " + u.contenu);
         System.out.println ();
      }
      System.out.println ();
  }
```

```
}
```

**Comparaison** Pour un graphe à $n$ sommets et $m$ arcs, la taille mémoire nécessaire est :
- Matrice d'adjacence : $n^2$.
- Matrice d'incidence : $n \times m$.
- Liste de successeurs : $n + m$.

**Conversions**

```
GrapheMat (GrapheSucc h) {
// Matrice de successeurs -> matrice d'adjacence
    nb = h.nb;
    m= new int[nb][nb];
    for (int i = 0; i < nb ; ++i)
       for (int j = 0; j < nb ; ++j) m[i][j] = 0;
    for (int i = 0; i < nb ; ++i)
        for (int k = 0; h.succ[i][k] != GrapheSucc.Omega; ++k)
            m[i][h.succ[i][k]] = 1;
}

GrapheSucc (GrapheMat g) {
// Matrice d'adjacence -> matrice de successeurs
  nb = g.nb;
  int nbMaxSucc = 0;
  int temp = 0;
  for (int i = 0; i < nb ; ++i) {
      for (int j = 0; j < nb  ; ++j)
          if (g.m[i][j] != 0) temp++;
      nbMaxSucc = Math.max (nbMaxSucc, temp);
      temp = 0;
  }
  succ = new int[nb][nbMaxSucc + 1];
  for (int i = 0; i < nb ; ++i) {
      int k = 0;
      for (int j = 0; j < nb  ; ++j)
          if (g.m[i][j] != 0)
              succ[i][k++] = j;
      succ[i][k] = Omega;
  }
}

GrapheListe (GrapheSucc g) {
// Matrice de successeurs -> tableau de listes de successeurs
  nb = g.nb;
  listeSucc = new Liste[nb];
  for (int i = 0; i < nb ; ++i) {
      listeSucc[i] = null;
      for (int k = 0; g.succ[i][k] != GrapheSucc.Omega; ++k)
          listeSucc[i] = Liste.ajouter(g.succ[i][k], listeSucc[i]);
  }
```

```
}
```

## 6.4 Accessibilité

### 6.4.1 Rappels sur les relations binaires

Soit $E$ un ensemble fini, $n = |E|$, et $R$ une relation binaire (c'est-à-dire une partie de $E \times E$). Pour un élément $\{(x, y)\} \in R$ on écrira aussi $x\,R\,y$. On définit par récurrence l'élévation à la puissance $R^i$ :

$$\left|\begin{array}{l} R^i = R \cdot R^{i-1} \\ R^0 = id \end{array}\right.$$

Par exemple, $R^2 = \{\,(x, z)\,/\,\exists y\,,\, xRy \,\wedge\, yRz\}$.

**Lemme 7.** $\exists\, p, q/\; 0 \leq p < q \leq 2^{(n^2)}$ *tq* $R^p = R^q$

**Preuve**. Il y a autant de relations binaires que de parties de $E \times E$. Comme $|E \times E| = n^2$, il y a exactement $2^{(n^2)}$ relations binaires. □

**Définition 6.** - *Soit $S$ est une relation binaire ; on dit que $S$ est transitive $\Leftrightarrow S^2 \subseteq S$.*
- *Soit $R$ est une relation binaire ; on définit la fermeture transitive $R^+$ par :*

$$R^+ = \bigcap_{\left\{\begin{array}{l} S \supseteq R \\ S transitive \end{array}\right.} S$$

**Remarque 1.** – *il existe au moins une relation transitive $S$ contenant $R$ (notamment $\forall x, y, xSy$).*
– *l'intersection de deux relations transitives est transitive.*

**Proposition 2.** $xR^+y \Leftrightarrow$

$$\exists p > 0\,|\,\exists x_1 \ldots x_p \in E \;\; avec \;\; x_1 = x, x_p = y \;\; et \;\; x_iRx_{i+1} \;\; pour \;\; 1 \leq i \leq p$$

$$ce\ qui\ peut\ aussi\ s'écrire\ :\ R^+ = \bigcup_{p \geq 1} R^p$$

**Preuve**. Nommons $xCy$ la relation *chemin de $R$*. Montrons que $C = R^+$ :
- $R^+ \subseteq C$ : $C$ contient $R$ et $C$ est transitive, donc $C$ est un des termes de l'intersection dans la définition de $R^+$.
- $C \subseteq R^+$ : fixons un chemin de $x$ à $y$, et soit $S$ transitive et contenant $R$. Comme $S$ contient $R$, $S$ doit contenir tous les arcs du chemin considéré ; et comme $S$ est transitive, $S$ doit contenir le couple $(x, y)$. Maintenant $R^+$ est l'intersection de tels relations $S$, donc $(x, y)$ est dans $R^+$.

□

**Proposition 3.**

$$(1) \quad R^n \subseteq \bigcup_{0 \leq i \leq n-1} R^i \qquad et \qquad (2) \quad \forall p \geq 1, R^p \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} R^i$$

**Preuve.** 1. Soit $S = \bigcup_{0\le i\le n-1} R^i$ et supposons $aR^n b$, on va montrer qu'alors $aSb$. Il existe $x_0, \ldots, x_n \in E$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_i R x_{i+1}$ pour $0 \le, i < n$. On a $n+1$ valeurs de $x$ donc il existe $p$ et $q$ tels que $x_p = x_q$, avec $0 \le p < q \le n$. Si $p = 0$ et $q = n$, alors $a = b$ donc $aR^0 b$ donc $aSb$. Sinon, on a $aR^p x_p = x_q = R^{n-q} x_n$, donc $aR^s b$ avec $s = n+p-q \le n-1$, et $aSb$.

2. Par récurrence sur $p$ :
   - $p = 1$ : $R^1 \subseteq \bigcup_{1\le i\le n} R^i$
   - $p \to p+1$ :
     on vient de montrer que $R^n \subseteq \bigcup_{0\le i\le n-1} R^i$, donc $\bigcup_{0\le i\le n} R^i \bigcup_{0\le i\le n-1} R^i$
     si par hypothèse de récurrence $R^p \subseteq \bigcup_{1\le i\le n} R^i \subseteq \bigcup_{0\le i\le n-1} R^i$,
     alors en composant par $R$ on a
     $R^{p+1} \subseteq \bigcup_{1\le i\le n} R^i$

□

**Définition 7.** *Fermeture reflexive et transitive :*

$$R^* = Id \cup R^+ = \bigcup_{0\le i\le n-1} R^i$$

### 6.4.2 Chemins dans les graphes

- Soit $M$ la matrice d'adjacence de $G = (V, E)$. On considère ses coefficients comme des entiers.
- **Lemme** : soit $M^p$ la puissance $p$-ème de $M$. Le coefficient $M^p_{ij}$ est égal au nombre de chemins de longueur $p$ de $v_i$ à $v_j$
- Preuve par récurrence :
  - Vrai par définition pour $p = 1$
  - $M^p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} M^{p-1}_{ik}.M_{kj}$, cette relation exprime toutes les décompositions possibles d'un chemin de longueur $p$ en un chemin de longueur $p-1$ suivi d'une dernière arête
- Notons que si on considère les coefficients de $M$ comme des booléens, $M^p$ donne l'existence d'un chemin de longueur $p$ (cf. ce qui précède).

### 6.4.3 Fermeture transitive

**Algorithme naïf**
- $G^+ = (V, A^+)$ défini par

$$(i, j) \in A^+ \Leftrightarrow \text{il y a un chemin non vide de } v_i \text{ à } v_j \text{ dans } G$$

- $M^+ = M + M^2 + \ldots + M^n$ est la fermeture transitive
- $M^* = I + M^+$ est la fermeture réflexive et transitive
- Coût de calcul de $M^+$ en $O(n^4)$ car on doit faire $n$ multiplications de matrices
- Coût de calcul de $M^*$ en $O(n^3 \log n)$ car on peut calculer "plus" : $\lceil \log n \rceil$ élévations successives au carré de $I + M$ (c'est l'algorithme d'exponentiation binaire vu Section 1.3)

**Algorithme de Roy-Warshall** L'algorithme de Roy-Warshall résout le problème de fermeture transitive d'un graphe. Au passage, ce problème est clairement un sous-problème du problème de plus court chemin. Il suffit pour le montrer de prendre tous les poids des arêtes égaux à 0. Dans une telle situation, $\delta(u, v)$ vaut 0 s'il existe un chemin entre $u$ et $v$, et vaut $+\infty$ dans le cas contraire. C'est ce qui permetttra d'étendre facilement l'algorithme pour traiter des plus courts chemins dan sun graphe sans cycle de poids négatif.

**Proposition 4.** *La récurrence* $A_{ij}^{(p)} = A_{ij}^{(p-1)} + A_{ip}^{(p-1)} A_{pj}^{(p-1)}$ *initialisée avec* $A^{(0)} = M$*, calcule* $M^+ = A^{(n)}$.

**Preuve**. La preuve est fondée sur l'idée que $A_{ij}^{(p)} = 1$ si et seulement s'il existe un chemin de $i$ à $j$ dont tous les sommets intermédiaires sont de numéro inférieur ou égal à $p$. Ce qui se démontre par récurrence sur $p$.

- Initialisation $p = 0$ : on n'utilise aucun sommet intermédiaire, donc les chemins sont réduits aux arêtes du graphe, et on a bien posé $A^{(0)} = M$.
- Le premier sens de l'équivalence est vérifié par construction. Si $A_{ij}^{(p)} = 1$, alors on a au moins une des égalités $A_{ij}^{(p-1)} = 1$ ou $A_{ip}^{(p-1)} A_{pj}^{(p-1)} = 1$, qui traduisent toutes deux l'existence d'un chemin de longueur inférieure ou égale à $p$, entre $i$ et $j$, par hypothèse de récurrence.
- Pour la réciproque, prenons un chemin de $i$ à $j$ de longueur inférieure ou égale à $p$, et montrons que $A_{ij}^{(p)} = 1$ :
  - Si ce chemin passe par le sommet $p$, on a $i \rightsquigarrow p \rightsquigarrow j$, avec $i \rightsquigarrow p$ et $p \rightsquigarrow i$ étant deux chemins dont tous les sommets intermédiaires sont de numéro strictement inférieur à $p$. Par hypothèse de récurrence, $A_{ip}^{(p-1)} = 1$ et $A_{pj}^{(p-1)} = 1$.
  - Si ce chemin ne passe pas par le sommet $p$, tous les sommets intermédiaires de ce chemin sont de numéro strictement inférieur à $p$, et par hypothèse de récurrence, $A_{ij}^{(p-1)} = 1$.

$\square$

**Algorithme de Roy-Warshall**

$A \leftarrow M$
**pour** $p = 1$ **à** $n$
  **pour** $i = 1$ **à** $n$
    **pour** $j = 1$ **à** $n$
      $A_{ij} \leftarrow A_{ij} + A_{ip}A_{pj}$

Cet algorithme s'effectue en place, c'est-à-dire que l'on travaille sur une seule matrice $A$ pour calculer successivement les $A^{(p)}$. Il y a deux manières de justifier cela.

La première consiste à dire que la matrice $A$ ne fait que croître (on n'enlève pas de 1), et que donc à la fin de l'algorithme $A^{(n)} \supseteq M^+$, et comme par construction on vérifie toujours $A \subseteq M^+$, on a bien $A = M^+$ à la fin.

La seconde justification s'appuie sur une réécriture de l'algorithme :

$A \leftarrow M$
**pour** $p = 1$ **à** $n$
  **pour** $i = 1$ **à** $n$
    **si** $A_{ip}$ **alors**
      **pour** $j = 1$ **à** $n$
        **si** $A_{pj}$ **alors**
          $A_{ij} \leftarrow 1$

Pour montrer l'équivalence des deux algorithmes, on discute selon la valeur de $A_{ip}$. Premier cas : $A_{ip} = 1$. On fait alors $A_{ij} \leftarrow A_{ij} + A_{pj}$ pour tout $j$. Lorsque $j = p$, on ne change pas $A_{ip}$ qui vaut déjà 1. Second cas : $A_{ip} = 0$. Il n'y a alors aucune modification de faite sur $A$ : $A_{ij} \leftarrow A_{ij} + 0A_{pj}$, et ce même lorsque $j = p$.

L'algorithme de Roy-Warshall est en $O(n^3)$. Pour calculer la fermeture réflexive, on part de $A^{(0)} = M$, mais pour la fermeture réflexive et transitive, on part de $A^{(0)} = I + M$.

**Implémentation**

```
static void multiplier (int c[][], int a[][], int b[][]) {
     int n = c.length;
     for (int i = 0; i < n; ++i)
         for (int j = 0; j < n; ++j) {
             c[i][j] = 0;
             for (int k = 0; k < n; ++k)
                 c[i][j] = c[i][j] + a[i][k] * b[k][j];
         }
}

static void additionner (int c[][], int a[][], int b[][]) {
    int n = c.length;
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        for (int j = 0; j < n; ++j)
            c[i][j] = a[i][j] * b[i][j];
}

static boolean existeChemin (int i, int j, GrapheMat g) {
    int n = g.nb;
    int m[][] = g.m;
    int u[][] = (int[][]) m.clone();
    int v[][] = new int[n][n];
    for (int k = 1; u[i][j] == 0 && k <= n; ++k) {
    multiplier (v, u, m);
    additionner (u, u, v);
    }
    return u[i][j] != 0;
}

 static public void fermetureTransitive(GrapheMat g) {
     for (int k = 0; k < g.nb; ++k)
         for (int i = 0; i < g.nb; ++i)
             if (g.m[i][k] == 1)
                 for (int j = 0; j < g.nb; ++j)
                    if (g.m[k][j] == 1)
                         g.m[i][j] = 1;
}

 static public void fermetureReflexiveTransitive (GrapheMat g) {
      for (int i = 0; i < g.nb; ++i)
          g.m[i][i] = 1;
      for (int k = 0; k < g.nb; ++k)
         for (int i = 0; i < g.nb; ++i)
             if (g.m[i][k] == 1)
                 for (int j = 0; j < g.nb; ++j)
                    if (g.m[k][j] == 1)
                         g.m[i][j] = 1;
}
```

## 6.5 Plus courts chemins

### 6.5.1 Définitions

Donnons-nous un graphe $G = (V, E)$, avec $V$ l'ensemble des sommets, et $E \subseteq (V \times V)$ l'ensemble des arêtes.

On suppose dans toute la partie que le graphe est stocké par sa matrice d'adjacence $M$. Ainsi $M_{ij} = 1 \Leftrightarrow (i, j) \in E$. Cette représentation n'est pas la seule possible, on pourrait par exemple utiliser des listes d'adjacence ou encore une listes d'arêtes. Il faut bien noter que la complexité des algorithmes peut dépendre de la représentation choisie.

**Définition 8.** – *Une pondération est une fonction $w : E \to \mathbb{R}$, et $w(i, j)$ correspond au poids de l'arête $(i, j)$.*

- *Le poids d'un chemin est la somme des poids des arêtes qui composent ce chemin. Si $p$ est un chemin passant par les sommets $x_i$, alors*

$$w(p) = \sum_{i=1}^{p-1} w(x_i, x_{i+1})$$

- *Soit $\delta(u, v)$ le poids du plus court chemin de $u$ à $v$. En notant $p : u \rightsquigarrow v$ un chemin $p$ allant de $u$ à $v$,*

$$\delta(u, v) = \min_{p\,:\,u \rightsquigarrow v} w(p)$$

Quelques précisions :

1. L'ensemble des chemins de $u$ à $v$ peut être vide, cela voulant dire qu'il n'existe aucun chemin de $u$ à $v$. Dans ce cas, on posera $\delta(u, v) = +\infty$.
2. L'ensemble des chemins de $u$ à $v$ est potentiellement infini, et on ne peut prendre le min de cet ensemble sans précautions.
   - S'il n'existe aucun circuit de poids négatif dans $G$, on peut alors se restreindre aux chemins élémentaires, qui sont eux en nombre fini. En effet, supposons que le chemin le plus court contienne une boucle. En enlevant cette boucle, qui selon notre supposition est de poids positif, on obtient un chemin plus court. Le chemin le plus court est donc nécessairement un chemin élémentaire.
   - S'il existe un chemin de $u$ à $v$ qui contient un circuit de poids strictement négatif, alors on peut construire un chemin de poids arbitrairement petit. Il suffit pour cela de boucler sur le circuit un nombre suffisant de fois : à chaque fois que l'on rajoute une boucle, on décroît le poids du chemin du poids de cette boucle. Dans un tel cas, on posera $\delta(u, v) = -\infty$.

**Remarque 2.** *Si tous les poids sont positifs, on est sûr qu'il ne peut y avoir de circuit de poids négatif. Cette condition suffisante est souvent utilisée.*

**Remarque 3.** *Un algorithme qui traite le cas général doit être capable de détecter les circuits de poids négatif lorsqu'ils sont accessibles.*

### 6.5.2 Présentation des plus courts chemins

Il y a trois problèmes de plus court chemin :

1. calculer le plus court chemin entre une source $u$ et une destination $v$,
2. calculer les plus courts chemins entre une source $u$ et tous les autres sommets du graphe,

3. calculer tous les plus courts chemins entre les sommets du graphe pris deux à deux.

Premier résultat qui peut surprendre au début : dans le pire cas, pour résoudre le problème 1, il faut résoudre le problème 2. En d'autres termes, on ne connaît pas d'algorithme qui résolve 1 sans résoudre 2, dans le pire cas. Le second résultat est qu'on peut résoudre le problème 3 plus efficacement qu'en résolvant le problème 2 pour chaque source.

On commencera par résoudre le problème 3, sans doute le plus simple, avec l'algorithme de Warshall-Floyd. Ensuite, on abordera l'algorithme de Dijkstra, efficace pour les problèmes 1 et 2.

**Remarque 4.** *Il existe une multitude d'algorithmes de plus courts chemins adaptés à des types de graphes particuliers : graphes sans circuits (acyclic graph), graphes orientés sans circuit (directed acyclic graph = DAG), graphes creux, c'est-à-dire avec peu d'arêtes par rapport au nombre de sommets (sparse graphs).*

Toutes les démonstrations sont basés sur la proposition fondamentale de sous-structure optimale qui suit.

**Proposition 5.** *Si $u \rightsquigarrow v$ est un plus court chemin de $u$ à $v$, et si $w$ est un sommet sur ce chemin (on a donc $u \rightsquigarrow w \rightsquigarrow v$), alors $u \rightsquigarrow w$ et $w \rightsquigarrow v$ sont des plus courts chemins.*

**Preuve**. Triviale par l'absurde. Si on trouvait par exemple un chemin plus court pour aller $u$ à $w$, on pourrait l'utiliser pour construire un chemin plus court pour aller de $u$ à $v$. □

### 6.5.3 Avec des poids positifs

Pour calculer les plus courts chemins entre toutes les paires de sommets, l'algorithme de Roy-Warshall se généralise aux plus courts chemins quand les poids sont positifs :
- Chaque arc $(i, j)$ est pondéré d'un poids $c(i, j) \geq 0$. On pose $c(i, j) = +\infty$ si $(i, j) \notin E$.
- Il n'y a donc pas de circuit de poids négatif, les plus courts chemins existent bien.
- On peut se restreindre aux chemins élémentaires.
- On pose $a(i, j) = c(i, j)$ si $i \neq j$, et $a(i, i) = 0$.
- On définit $a_k(i, j)$ plus court chemin de $v_i$ à $v_j$ dont tous les sommets intermédiaires sont $\leq k$.
- Récurrence : $a_k(i, j) = \min(a_{k-1}(i, j), a_{k-1}(i, k) + a_{k-1}(k, j))$.
- Implémentation très similaire (attention à la somme avec $+\infty$).

**Remarque 5.** *Pour l'instant, le programme se contente de retourner la longueur du plus court chemin. Si on veut récupérer un plus court chemin (il peut y en avoir plusieurs), on peut utiliser une matrice auxiliaire $P$ pour retenir la provenance, définie ainsi :*
- *$P_{ij}$ contient le numéro du dernier sommet intermédiaire d'un plus court chemin allant de $i$ à $j$,*
- *$P_{ij} = i$ s'il n'y a pas de sommet intermédiaire sur ce chemin,*
- *$P_{ij} = NULL$ s'il n'y a pas de chemin de $i$ à $j$.*

### 6.5.4 Chemins algébriques dans les semi-anneaux

Pour le cas général, si les poids sont arbitraires, il peut y avoir des circuits de poids négatifs, et le plus court chemin n'est pas défini (ou plutôt, prend la valeur $-\infty$). Il s'agit de généraliser Floyd-Warshall pour obtenir un algorithme qui calcule la longueur des plus courts chemins entre toutes les paires de sommets en tenant compte des circuits de poids négatifs, aussi appelés circuits absorbants.

Soit un semi-anneau $(H, \oplus, \otimes)$. Rappel : dans un semi-anneau il n'y a pas forcément d'opposé à toutes les valeurs, contrairement aux anneaux. On définit l'opération étoile par $a^* = \sum_{i=0}^{+\infty} a^i$ pour tout $a \in H$. En fixant astucieusement des semi-anneaux, on retrouvera d'abord Roy-Warshall, puis on déduira l'algorithme de Warshall-Floyd avec circuits absorbants.

La relation de récurrence sur laquelle se base l'algorithme est légèrement modifiée afin de prendre en compte les circuits absorbants :

$$A_{ij}^{(p)} \quad = \quad A_{ij}^{(p-1)} \quad \oplus \quad ( \, A_{ip}^{(p-1)} \otimes (A_{pp}^{(p-1)})^* \otimes A_{pj}^{(p-1)} \, )$$

Le calcul de $(A_{pp}^{(p-1)})^*$ n'a besoin d'être effectué qu'une seule fois par itération sur $p$, et celui de $A_{ip}^{(p-1)} \otimes (A_{pp}^{(p-1)})$ qu'une seule fois par itération sur $i$. En faisant apparaître ces factorisations, on obtient l'algorithme qui suit.

**Algebraic Path Problem (APP)**

$A \leftarrow M$
**pour** $p = 1$ **à** $n$
  $A_{pp}^{(p)} \leftarrow (A_{pp}^{(p-1)})^*$
  **pour** $i = 1$ **à** $n$, $i \neq k$
    $A_{ip}^{(p)} = A_{ip}^{(p-1)} \otimes A_{pp}^{(p)}$
    **pour** $j = 1$ **à** $n$, $j \neq k$
      $A_{ij}^{(p)} = A_{ij}^{(p-1)} \oplus (A_{ip}^{(p)} \otimes A_{pj}^{(p-1)})$
    $A_{pj}^{(p)} = A_{pp}^{(p)} \otimes A_{pj}^{(p-1)}$

Pour l'algorithme de Roy-Warshall, on utilise :

$$\left| \begin{array}{l} H = \{0, 1\} \\ \oplus = \text{ou logique} \\ \otimes = \text{et logique} \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \forall a, a^* = 1$$

Pour l'algorithme de Warshall-Floyd avec gestion des circuits absorbants, on utilise :

$$\left| \begin{array}{l} H = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} \\ \oplus = \min \\ \otimes = + \end{array} \right. \qquad \Rightarrow a^* = \begin{cases} 0 & \text{si}\, a > 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Enfin, étant donnée une matrice réelle $A$, on peut calculer la matrice $(I - A)^{-1}$ par l'algorithme de Gauss-Jordan : on pose $H = (\mathbb{R}, +, \times)$ et $a^* = \frac{1}{1-a}$ si $a \neq 1$.

Il est surprenant que chercher des plus courts chemins dans des graphes et inverser des matrices soient en fait deux facettes d'un même problème ! La preuve de ces résultats est laissée au soin du lecteur motivé.

### 6.5.5 Algorithme de Dijkstra

On s'intéresse maintenant au problème des plus courts chemins à partir d'une source donnée. L'algorithme de Dijkstra que l'on étudie ici ne fonctionne que sur les graphes où tous les poids sont positifs. Pour les autres, on peut utiliser l'algorithme de Bellman-Ford (voir le Cormen).

Soit $G(V, E, w)$ un graphe orienté, dont les sommets sont numérotés $V = 1, 2, \ldots, n$ et avec la source étant le sommet 1. On note $\Gamma(i)$ l'ensemble des voisins du sommet $i$, ce qui s'écrit $\Gamma(i) = \{j \ / \ (i, j) \in E\}$.

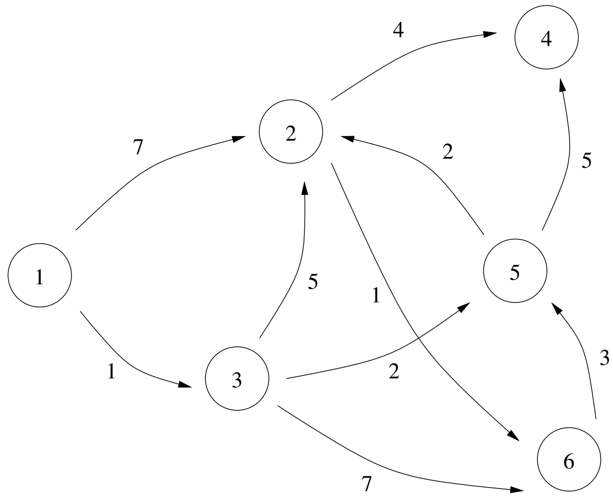
**Algorithme de Dijkstra**

$S \leftarrow \{1\}$

$d(i) = w(1, i)$ si $i \in \Gamma(1)$, et $+\infty$ sinon
**tant que** $S \neq V$
Soit $j$ tel que $j \notin S$ et $d(j) = \min_{i \in S} d(i)$
$S \leftarrow S \cup \{j\}$
**pour tout** $k \in \Gamma(j)$ vérifiant $k \notin S$
$d(i) \leftarrow \min\{\, d(i)\,,\ d(k) + w(k, i)\,\}$

Il s'agit d'un algorithme entièrement glouton, qui ajoute à $S$ les points un par un, dans l'ordre de leur distance au sommet 1. $S$ correspond à l'ensemble des sommets $i$ pour lesquels $\delta(1, i)$ est déterminé. Lors de l'ajout d'un somment $j$ à $S$, on met à jour les distances des voisins de $j$.

Voici un example :




Déroulons les étapes de l'algorithme de Dijkstra sur ce graphe. Le tableau qui suit contient les valeurs des $d(i)$ pour tous les sommets $i$ (en colonnes), au fil des étapes (en lignes). A chaque étape, la valeur $d(j)$ correspondante au sommet $j$ ajouté à $S$ est marquée en gras.

| étape / $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | **0** | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| 1 | . | 7 | **1** | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| 2 | . | 6 | . | $\infty$ | **3** | 8 |
| 3 | . | 5 | . | 8 | . | 8 |
| 4 | . | **5** | . | 8 | . | 8 |
| 5 | . | . | . | 8 | . | **6** |
| 6 | . | . | . | **8** | . | . |
| $\delta(1, i)$ | 0 | 5 | 1 | 8 | 3 | 6 |

**Preuve**. Il faut procéder rigoureusement, car il est très facile de donner une preuve fausse de cet algorithme. On notera $d^*(i)$ à la place de $\delta(1, i)$ pour désigner le poids du plus court chemin de la source au sommet $i$. L'invariant s'énonce ainsi :

$$\left|\begin{array}{l} \text{si } i \in S, \quad d(i) = d^*(i) \\ \text{si } i \notin S, \quad d(i) = \min_{\substack{k \in S \\ i \in \Gamma(k)}} \{d(k) + w(k, i)\}, \quad \text{ou } +\infty \text{ si indéfini} \end{array}\right.$$

Démontrons cet invariant par récurrence sur le cardinal de $S$, en discutant selon la nature des sommets : ceux qui restent dans $S$, celui qui rentre dans $S$, et ceux qui restent dans $V \setminus S$.

- Pour tout sommet $i$ qui reste dans $S$, on conserve $d(i) = d^*(i)$.
- Considérons un $j$ qui rentre dans $S$, c'est-à-dire vérifiant $j \notin S$ et $d(j) = \min_{i \in S} d(i)$. L'objectif est de prouver que $d(j) = d^*(j)$.
  1. Considérons $\mu$ un plus court chemin de la source au sommet $j$.
  2. Décomposons $\mu$ en $\mu_1 + \mu_2$ (concaténation de chemin), avec $\mu_1$ chemin de 1 à $k$ où $k$ est le premier sommet de $\mu$ qui n'est pas dans $S$.
  3. Comme tous les poids sont positifs, $w(\mu_2) \geq 0$, et donc $w(\mu) \geq w(\mu_1)$.
  4. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à $k \notin S$, $d(k)$ est inférieur au poids de tout chemin de 1 à $k$ dont tous les sommets intermédiaires sont dans $S$, donc $w(\mu_1) \geq d(k)$.
  5. Mais par définition de $j$, $d(j) = \min_{i \in S} d(i)$, et donc $d(k) \geq d(j)$.
  6. Par transitivité, $w(\mu) \geq d(j)$, donc $d(j)$ est inférieur au poids d'un plus court chemin de 1 à $j$, et par conséquent $d(j)$ est le poids du plus court chemin, ce qui se traduit $d(j) = d^*(j)$.
- Les sommets $i$ qui restent dans $V \setminus S$ sont de deux catégories :
  - si $i \notin \Gamma(j)$, alors $d(i)$ est inchangé.
  - si $i \in \Gamma(j)$, alors $d(i)$ est correctement mis à jour par l'algorithme.

Ceci clot la démonstration de la correction de l'algorithme de Dijkstra. □

**Complexité de l'algorithme de Dijkstra** Commençons par une majoration grossière. Il y a au plus $n$ étapes correspondant à des insertions d'un sommet supplémentaire dans $S$. À chaque étape, il faut :
- trouver le $j \notin S$ qui minimise $d(j)$, ce qui peut se faire naïvement en regardant tous les sommets de $V \setminus S$, donc en moins de $n$ opérations.
- propager sur tous les voisins du $j$ considéré, ce qui est de l'ordre de $|\Gamma(j)|$, là encore majoré par $n$. La complexité de l'algorithme est donc majorée par $O(n^2)$.

Cette complexité est optimale pour les graphes denses. Dans le pire cas, pour un graphe qui possède $n^2$ arêtes, il faudra considérer toutes les arêtes. En revanche, pour les graphes creux, l'utilisation d'un tas améliore la complexité. En notant $m$ le nombre d'arêtes :
- à chaque étape, la récupération du minimum peut se faire en $\log n$ si on utilise un tas, donc au total $n \log n$,
- chaque arrête sera propagée au plus un fois, et à chaque propagation il faut mettre à jour la valeur dans le tas en $\log n$, ce qui fait au total moins de $m \log n$.

La complexité d'une implémentation avec un tas pour un graphe donnée par les listes d'adjacences des sommets est donc $O\big((n + mp) \log n\big)$.

Ainsi, our les graphes dont le degré sortant des sommets est majoré par une petite constante, comme $m$ est en $O(n)$, on a un algorithme de plus court chemin en $O(n \log n)$. Il existe une structure avancée appelée tas de Fibonnacci qui permet de décroître des valeurs dans le tas en une complexité amortie $O(1)$. Avec cette structure, l'algorithme de Dikjstra est en $O(n \log n + m)$.

## 6.6 Parcours en largeur

**Cahier des charges**
- $G = (V, E)$ graphe orienté à $n = |V|$ sommets et $m = |E|$ arêtes.
- On se donne une racine $r$ et on cherche une arborescence des plus courts chemins à partir de $r$ : sommets $x$ tels qu'il existe un unique chemin de $r$ à $x$.
- Idée : faire un parcours en largeur (à l'aide d'une file)

**Implémentation**

```
class Arbo{
  int pere[];
  final static int Omega = -1;

  Arbo (int n, int r) {
    // initialisation d'une arborescence de racine r
    pere = new int[n];
    for (int i = 0; i < n ; ++i)
         pere[i] = Omega;
    pere[r] = r;
  }

  Arbo (GrapheSucc g, int r) {
    // conversion de représentation
    // calcul des pères si g est une arboresence donnée en
   liste de successeurs
    // attention: il peut y avoir des cycles
    pere = new int[g.nb];
    pere[r] = r;
    for (int i = 0; i < g.nb ; ++i)
        for (int k = 0; g.succ[i][k] != GrapheSucc.Omega; ++k)
            pere[g.succ[i][k]] = i;
  }

  static  void imprimer (Arbo a) {
     System.out.println ("nombre de sommets " + a.pere.length + " ");
     for (int i = 0; i < a.pere.length; ++i)
         System.out.println ("sommet " + i + ", : pere: " + a.pere[i]);
  }

  static int[] numPrefixe (int r, GrapheSucc g) {
    // généralise la numérotation des arbres binaires
    // parcours Père 1erFils 2èmeFils ... dernierFils
    int numero[] = new int[g.nb];
    numPrefixe1 (r, g, numero, 0);
    return numero;
  }

  static void numPrefixe1 (int x, GrapheSucc g, int numero[], int num) {
    numero [x] = num++;
    for (int i = 0; g.succ[x][i] != GrapheSucc.Omega; ++i)
        numPrefixe1 (g.succ[x][i], g, numero, num);
  }

  static Arbo arbPlusCourt (GrapheSucc g, int r) {
      // ici g est un graphe quelconque
      Arbo a = new Arbo(g.nb, r);
      File f = new File.vide();
```

```
      File.ajouter(r, f); // d[r] = 0
      while (!File.estVide(f)) {
          int x = File.valeur(f);
          File.supprimer(f);
          for (int i = 0; g.succ[x][i] != GrapheSucc.Omega; ++i) {
              int y = g.succ[x][i];
              if (a.pere[y] == Omega) {
                  a.pere[y] = x;  // d[y] = d[x] + 1
                  File.ajouter(y, f);
              }
          }
      }
     return a;
  }
}
```

**Complexité**

- Parcours en temps $O(n+m)$ car :
  1. chaque sommet est empilé/dépilé au plus une fois,
  2. chaque arc est exploré au plus une fois,
- Après le parcours, $x$ est atteignable $\Leftrightarrow$ $\mathsf{pere[x]} \neq \mathsf{Omega}$ (et sa distance à $r$ est $d[x]$).
- Nouvelle solution à l'existence d'un chemin d'un point à un autre.

## 6.7 Parcours en profondeur

### 6.7.1 Première version

**Cahier des charges**

- $G = (V, E)$ graphe orienté à $n = V$ sommets et $m = E$ arêtes.
- On se donne une racine $r$ et on cherche une arborescence de Trémaux, i.e. un parcours en profondeur du graphe à partir de $r$
- Version récursive naturelle ou utilisation d'une pile.

**Implémentation**

```
class Parcours{
  final static int Omega = -1;

  static void tremaux(int x, GrapheSucc g) {
    // parcours en profondeur de racine x
    tremauxRec(x, g, new Arbo(g.nb, x));
  }

  static void tremauxRec(int x, GrapheSucc g, Arbo a) {
    for (int k = 0; g.succ[x][k] != Omega; ++k) {
        int b = g.succ[x][k];
        if (a.pere[b] == Omega) {
            a.pere[b] = x;
            tremauxRec(b, g, a);
```

```
      }
    }
  }

  static void tremauxPile(int x, GrapheSucc g, Arbo a) {
    int y, z;
    Pile p = new Pile();
    Pile.ajouter (x, p);
    a.pere[x] = x;
  boucle:
    while ( !Pile.estVide(p) ) {
    y = Pile.valeur (p);
    for (int k = 0; g.succ[y][k] != GrapheSucc.Omega; ++k) {
        z = g.succ[y][k];
        if (a.pere[z] == Omega)
        a.pere[z] = y;
        Pile.ajouter (z, p);
        continue boucle;
    }
    Pile.supprimer (p);
    }
  }
}
```

**Commentaires**

- Complexité en $O(n+m)$.
- On visite encore tous les sommets accessibles depuis la racine, et seulement ceux-ci.
- La version non récursive n'est pas optimisée, car on parcourt plusieurs fois la liste des successeurs : il faudrait empiler le rang du successeur visité en même temps qu'on l'empile, et incrémenter ce rang au moment où on le dépile.

### 6.7.2 Analyse fine du parcours en profondeur

On propose ici une version plus élaborée du parcours en profondeur, qu'on note DFS, pour *Depth First Search*, dans cette section.

**Nouvelle version de DFS(G)** Quelques notations :

- WHITE= sommet non traité, GREY= en cours, BLACK= fini
- $\forall u \in V[G]$, $d[u]$ = date de début et $f[u]$ = date de fin

DFS(G)
for each vertex $u \in V[G]$ do
text color(u) $\leftarrow$ WHITE
  p(u) $\leftarrow$ NIL
endfor
time $\leftarrow$ 0
for each vertex $u \in V[G]$ do
  if color(u) = WHITE then
    DFS-Visit(u)

endfor

DFS-Visit(u)
color(u) $\leftarrow$ GRAY //u vient d'être découvert
d(u) $\leftarrow$ time $\leftarrow$ time + 1
for each $v \in Adj[u]$ do
    if color(v) = WHITE then
        p(v) $\leftarrow$ u
        DFS-Visit(v)
endfor
color(u) $\leftarrow$ BLACK //u est terminé
f(u) $\leftarrow$ time $\leftarrow$ time + 1

Le coût de DFS(G) est bien en$O(n+m) = O(|V|+|E|)$

**Propriétés de DFS**

- On obtient une forêt d'arbres.
- Structure parenthésée :
  **Proposition 6.** *Pour toute paire de sommets u et v, on a un et une seule des trois propriétés suivantes :*
  1. *les intervalles* $[d(u), f(u)]$ *et* $[d(v), f(v)]$ *sont disjoints,*
  2. *l'intervalle* $[d(u), f(u)]$ *est inclus dans l'intervalle* $[d(v), f(v)]$*, et u est un descendant de v dans l'arbre DFS,*
  3. *l'intervalle* $[d(v), f(v)]$ *est inclus dans l'intervalle* $[d(u), f(u)]$*, et v est un descendant de u dans l'arbre DFS.*
- Conséquence : $v$ est un descendant de $u$ dans la forêt DFS
  $\Leftrightarrow d(u) < d(v) < f(v) < f(u)$
- Chemin blanc :
  **Proposition 7.** *Dans une forêt DFS(G), v est un descendant de u* $\Leftrightarrow$ *à l'instant d(u) où on découvre u, il existe un chemin WHITE de u à v.*

**Classification des arêtes**

- 4 types d'arêtes sont produits par DFS(G) :
  1. *Tree* : arcs de la forêt
  2. *Back* : arcs $(u, v)$ connectant $u$ à un de ses ancêtres $v$ dans la forêt (boucles incluses)
  3. *Forward* : arcs $(u, v)$ connectant $u$ à un de ses descendants $v$ dans la forêt mais ne faisant pas partie de celle-ci
  4. *Cross* : toutes les autres
- Extension de DFS(G) pour classer l'arc $(u, v)$ la première fois que l'arc est exploré :
  1. $v$ WHITE $\rightarrow (u, v)$ *Tree*
  2. $v$ GRAY $\rightarrow (u, v)$ *Back*
  3. $v$ BLACK $\rightarrow (u, v)$ *Forward* ou *Cross*
- Pour les graphes non orientés, il n'y a que des arêtes *Tree* et *Back*

## 6.8 Tri topologique

**Définition**

- DAG = graphe orienté acyclique
- Tri topologique d'un DAG = numérotation des sommets qui respecte les arcs :
  $(u, v)$ arc de G $\Rightarrow u$ a un numéro plus petit que $v$
- Application des DAG : ordonnancement

**Algorithme**

- Appeler DFS(G), et trier les $f(u)$ en ordre décroissant pour avoir une numérotation valide
- Au moment où un sommet est terminé, l'insérer en tête d'une liste chaînée → ordre topologique des sommets
- Caractérisation :
  **Proposition 8.** *G DAG ⇔ DFS(G) ne donne pas d'arcs de type Back*

## 6.9 Forte connexité

**Algorithme**

- Composante fortement connexe : ensemble maximal $U$ tel que

$$\forall u, v \in U,\ u \rightsquigarrow v \text{ et } v \rightsquigarrow u$$

- Calcul avec deux parcours DFS :
  1. Appeler DFS(G) et garder les dates de fin $f((u)$
  2. Construire le graphe inversé $G^T$ : $(u, v) \in E^T \Leftrightarrow (v, u) \in E$
  3. Appeler DFS($G^T$) mais dans la boucle principale considérer les sommets dans l'ordre des $f(u)$ décroissants
  4. Chaque arbre de cette forêt DFS($G^T$) est une composante fortement connexe

**Preuve de correction** La preuve est détaillée dans l'exercice qui suit.

## 6.10 Exercices

**Exercice 6.10.1.** *Composantes fortement connexes d'un graphe orienté*

On travaille sur des graphes *orientés*, que l'on suppose représentés par des *listes d'adjacence* : soit $S$ l'ensemble des sommets et $A$ l'ensemble des arcs, on associe à chaque sommet $u$ dans $S$ la liste $Adj[u]$ des éléments $v$ tels qu'il existe un arc de $u$ à $v$.

1 - **Parcours en profondeur**

Le parcours en profondeur d'un graphe $G$ fait usage des constructions suivantes :

- A chaque sommet du graphe est associée une *couleur* : au début de l'exécution de la procédure, tous les sommets sont blancs. Lorsqu'un sommet est rencontré pour la première fois, il devient gris. On noircit enfin un sommet lorsque l'on est en fin de traitement, et que sa liste d'adjacence a été complètement examinée.
- Chaque sommet est également *daté* par l'algorithme, et ceci deux fois : pour un sommet $u$, $d[u]$ représente le moment où le sommet a été rencontré pour la première fois, et $f[u]$ indique le moment où l'on a fini d'explorer la liste d'adjacence de $u$. On se servira par conséquent d'une variable entière "temps" comme compteur évênementiel pour la datation.

– La manière dont le graphe est parcouru déterminera aussi une relation de paternité entre les sommets, et l'on notera $\pi[v] = u$ pour dire que $u$ est le père de $v$ (selon l'exploration qui est faite, c'est à dire pendant le parcours $v$ a été découvert à partir de $u$).

On définit alors le parcours en profondeur (**PP**) de la manière suivante :

```
PP(S,Adj[],temps) :=
 pour chaque sommet u de S                    Initialisation
   faire  couleur[u] ← BLANC
          π[u] ← NIL
 temps← 0
 pour chaque sommet u de S                    Exploration
   faire si couleur[u]=BLANC
            alors Visiter_PP(u)

Visiter_PP(u) :=
 couleur[u] ← GRIS
 d[u] ←temps ←temps+1
 pour chaque v ∈ Adj[u]
   faire si couleur[v]=BLANC
            alors π[v] ← u
                  Visiter_PP(v)
 couleur[u] ← NOIR
f[u] ← temps← temps+1
```

→ Quel est la complexité de PP ? Que peut-on dire de $d[u]$, $f[u]$, $d[v]$ et $f[v]$, pour deux sommets $u$ et $v$ du graphe ?

→ Montrer que $v$ est un descendant de $u$ si et seulement si à l'instant $d[u]$, il existe un *chemin blanc* de $u$ à $v$.

2 - **Composantes fortement connexes**

On définit la relation binaire $R$ des sommets d'un graphe orienté par : $xRy$ si et seulement s'il existe un chemin orienté de $x$ à $y$ et un chemin orienté de $y$ à $x$.

→ Montrer que c'est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence sont appelées *composantes fortement connexes* du graphe orienté. Ce sont les sous-ensembles maximaux du graphe tels qu'il existe un chemin allant d'un sommet $u$ à un sommet $v$ pour tous sommets $u$ et $v$ de l'ensemble.

→ Montrer que lors d'un parcours en profondeur, tous les sommets appartenant à la même composante fortement connexe sont dans le même arbre en profondeur (issu de l'application de PP sur $G$).

Pour tout sommet $u$, et pour une exécution d'un parcours en profondeur, on appelle $\phi(u)$ le sommet $w$ tel que $u \rightsquigarrow w$ (i.e. il existe un chemin éventuellement nul de $u$ à $w$) et $f[w]$ est maximal. On appelle $\phi(u)$ l'*aïeul de $u$*.

→ Montrer que $\phi(u)$ est un ancêtre de $u$.

**Remarque :** par conséquent, $u$ et $\phi(u)$ sont dans la même composante fortement connexe, et plus globalement, deux sommets sont dans la même composante fortement connexe si et seulement si ils ont le même aïeul.

3 - On considère l'algorithme suivant :

– Exécuter le parcours en profondeur de $G$ pour calculer $f$ sur l'ensemble des sommets.
– Calculer le graphe ${}^tG$ qui a les mêmes sommets que $G$ mais où le sens des arcs est inversé.

– Exécuter le parcours en profondeur de ${}^tG$ en appelant dans la boucle principale les sommets par $f$ décroissant. Les composantes fortement connexes de $G$ (et aussi de ${}^tG$) sont les arbres ainsi obtenus.

→ Montrer la correction de l'algorithme précédent (par exemple en montrant par récurrence sur le nombre d'arbres déjà calculés qu'une composante fortement connexe, et donc l'ensemble des sommets de même aïeul selon $G$, est un arbre). Quelle est sa complexité ?

**Correction.**

1 - Parcours en profondeur

1.1 - Complexité et relation entre les sommets

L'initialisation se fait en $\mathcal{O}(|S|)$. Grâce au système de coloriage, il est évident que l'on appelle la procédure **Visiter_PP** sur chaque sommet une fois et une seule, soit directement depuis **PP**, soit depuis le traitement d'un autre sommet. Le traitement d'un sommet se fait en $\mathcal{O}(1)$ plus une comparaison pour chaque arc qui part de ce sommet. Donc chaque arc est également visitée une fois et une seule car elle est visitée uniquement depuis son sommet de tête et chaque sommet n'est traité qu'une fois. La complexité du parcours est donc clairement en $\mathcal{O}(|S| + |A|)$.

Soient $u$ et $v$ deux sommets du graphe. On suppose $d[u] < d[v]$, dans le cas contraire il suffit d'inverser les notations. On distingue deux cas :

1. $v$ est un descendant de $u$. On rencontre alors $v$ avant d'avoir terminé $u$, et on termine de l'explorer avant également. Donc

$$d[u] < \quad d[v] < f[v] \quad < f[u]$$

2. $v$ n'est pas un descendant de $u$, ce qui signifie que l'on termine l'exploration de $u$ avant de commencer celle de $v$. D'où :

$$d[u] < \quad f[u] < d[v] \quad < f[v]$$

1.2 - Lemme du chemin blanc

**Lemme :** $v$ est un descendant de $u$ si et seulement si il existe un *chemin blanc* de $u$ à $v$ à l'instant $d[u]$

*preuve :* Soit $v$ un descendant de $u$. Il existe donc un chemin de $u$ à $v$ emprunté lors de l'exécution de l'algorithme. L'algorithme n'empruntant que des sommets blancs, tous les sommets de ce chemin étaient blanc à l'instant $d[u]$. Il existe donc un chemin blanc de $u$ à $v$ à l'instant $d[u]$.

Supposons la réciproque fausse : si il existe un chemin blanc de $u$ à $v$, $v$ n'est pas forcément descendant de $u$. Prenons alors $v$ comme le sommet le plus proche de $u$ tel qu'il existe un chemin blanc de $u$ à $v$ à $d[u]$ et tel que $v$ ne soit pas un descendant de $u$. Prenons $w$ le sommet précédent $v$ sur ce chemin. On a donc $w$ descendant de $u$ (ou $w = u$) ce qui implique $f(w) \leq f(u)$. $u$ est donc encore blanc à l'instant $d[w]$ Donc pendant l'exécution de $w$, soit $v$ est blanc quand on considère l'arc $w \to v$, dans ce cas on le traite à ce moment là, et $d[w] < d[u] < f[w]$, soit il est noir à ce moment là et donc $d[w] < f[u] < f[w]$. Comme il n'y a que deux configurations possible pour les inégalités entre les débutsfins de traitement, on a dans les deux cas $d[w] < d[u] < f[u] < f[w]$. Autrement dit, $v$ est un descendant de $w$, et donc aussi de $u$ par transitivité. D'où contradiction avec l'hypothèse de départ.

2 - Composantes fortement connexes

2.1 - Relation d'équivalence

Il est facile de montrer que $R$ est une relation d'équivalence. Par convention, un sommet $x$ a un chemin de longueur nulle vers lui-même, d'où $xRx$. D'autre part si $xRy$ et $yRz$ alors il existe un chemin de $x$ à $y$ et un chemin de $y$ à $z$. En composant les deux on a donc un chemin de $x$ à $z$. De même, comme il existe un chemin de $z$ à $y$ et un chemin de $y$ à $x$, il existe un chemin de $z$ à $x$, donc $xRz$. Enfin comme $xRy$ implique qu'il y a un chemin de $x$ à $y$ *et* un chemin de $y$ à $x$, on a, par définition $yRx$. $R$ est bien une relation d'équivalence.

2.2 - Les composantes fortement connexes sont dans le même arbre

Soit $C$ une classe composante fortement connexe. Prenons $u \in C$ tel que $d[u] = min_{x \in C}(d[x])$. A $d[u]$ tous les sommets de $C$ sont blancs (sauf $u$ qui est gris), donc $\forall x \in C$, il existe un chemin blanc de $u$ à $x$. Donc d'après le lemme du chemin blanc, $x$ est descendant de $u$. Donc tous les sommets de $C$ (à part $u$) sont descendants de $u$. Donc tous les sommets de $C$ sont dans le même arbre de profondeur.

2.3 - L'aïeul est un ancêtre

On a donc $\phi(u) = w$ successeur de $u$ et quelque soit $v$ successeur de $u$, $f(v) \leq f(w)$.

Si à $d[u]$ tous les successeurs de $u$ sont blancs, alors on a clairement $w = u$, car d'après le lemme du chemin blanc, tous les autre successeurs seront des fils de $u$. $\phi(u)$ est donc bien un ancêtre de $u$.

Sinon, à $d[u]$, $w$ est gris ou noir. Si il est noir : $f[w] < d[u] < f[u]$, ce qui contredit la définition de $w$. Donc $w$ est gris, ce qui implique la relation $d[w] < d[u] < f[w]$, c'est à dire que $u$ est un descendant de $w$, donc $\phi(u)$ est bien un ancêtre de $u$.

$\phi(u)$ est donc à la fois un successeur et un ancêtre de $u$. Ces deux sommets font donc partis de la même composante fortement connexe. De manière plus général $u$ et $v$ font partie de la même CFC si et seulement si $\phi(u) = \phi(v)$.

3 - Algorithme pour les composantes fortement connexe

Voyons de manière informelle ce que fait l'algorithme décrit. Tout d'abord, il fait un parcours en profondeur classique. Ainsi à tout sommet $u$, il associe l'instant $f(u)$ de fin d'exécution. A la fin de cet algorithme, on a donc plusieurs arbres de profondeurs.

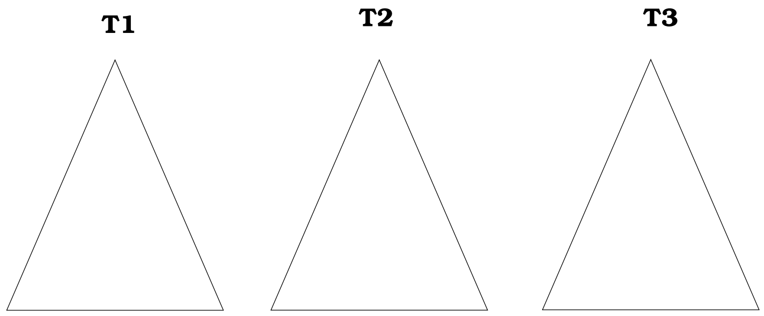



FIG. 6.1 – Après exécution du premier parcours

Tous les sommets d'un même arbre sont donc atteignables depuis la racine. De même, si on prend un sous-arbre de l'un des arbres de profondeurs, tous les sommets de ce sous-arbre sont atteignable depuis la racine de ce sous-arbre. Ensuite, on change le sens des arcs $G$ et on effectue un parcours en profondeur par $f$ décroissant. On va forcément commencer par la racine du dernier arbre de profondeur (dans la figure 6.1, il s'agit du sommet $T_3$). Chaque arbres généré par ce second algorithme sera entièrement inclus dans un des arbres du premier algorithme. En effet, supposons qu'un sommet de $T_2$ est atteignable depuis $T_3$. Celà signifie que dans $G$, il y a un arc entre un sommet $u$ de $T_2$ et un sommet $v$ de $T_3$, ce qui est impossible, car à l'exécution du premier algorithme, à l'instant $d(u)$, $v$ était blanc, et donc il aurait été visité et donc $v$ aurait appartenu à $T_2$. Supposons maintenant qu'un sommet de $T_2$ est atteignable depuis $T_3$. Alors, ce sera lors du traitement du sommet de $T_2$ qu'on pourra atteindre celui de $T_3$. Mais les sommets étant traités par $f$ décroissants, le sommet de $T_3$ aura déjà été traité, donc sera noir, et ne sera donc pas visité. Les nouveaux arbres sont donc inclus dans les anciens comme le montre la figure 6.2.

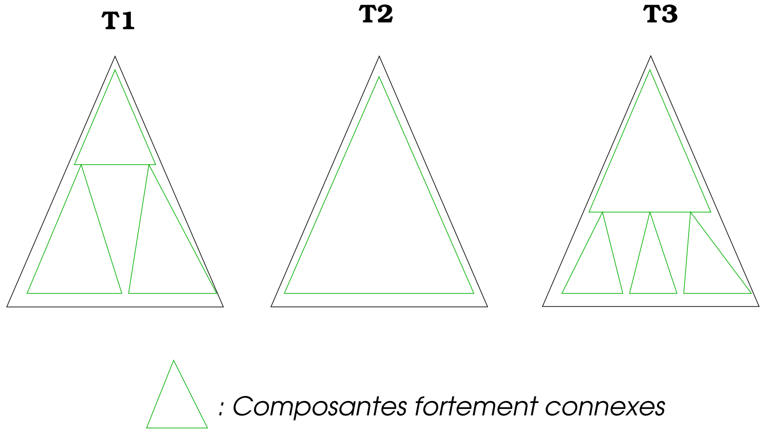



FIG. 6.2 – Après exécution du second parcours

Les arbres générés par ce deuxième algorithme, au moins aussi nombreux que ceux générés par le premier algorithme, regroupent un ensemble de sommets qui sont tous atteignables depuis la racine, et qui peuvent tous atteindre la racine. Ce sont donc effectivement les composantes fortement connexe de $G$ (et aussi de ${}^tG$). On va le démontrer plus formellement par récurrence sur les arbres de profondeur de ${}^tG$.

Supposons que tous les arbres obtenus jusqu'à présent sont des composantes fortement connexes de $G$. Notons $r$ la racine du prochain arbre $T$. Définissons l'ensemble $C(r) = \{v \in S \mid \phi(v) = r\}$. Il s'agit donc de la composante fortement connexe de $r$.

Montrons que $u \in T \Leftrightarrow u \in C(r)$.

( $\Leftarrow$ ) : $r$ étant la racine de $T$, si $\phi(u) = r$ alors $r$ est un successeurs de $u$ et surtout, il n'existe pas de successeurs $v$ de $u$ tels que $f[v] \leq f[r]$. Donc $u$ ne peut pas appartenir à un arbre créé avant $T$, donc $u \in T$.

( $\Rightarrow$ ) : si $u \in T$, supposons $\phi(u) \neq r$. Alors, soit $f(\phi(u)) > r$ soit $f(\phi(u)) < r$.

- si $f(\phi(u)) > r$, alors $\phi(u)$ a déjà été visité avant le traitement de $r$. Et comme $u$ et $\phi(u)$ sont dans la même CFC, alors par hypothèse de récurrence, ils appartiennent au même arbre de profondeur. Donc $u \notin T$, absurde.
- sinon, on a $f(\phi(u)) < r$, et $r$ descendant de $u$ car $u \in T$, ce qui est impossible par définition de $\phi$.

Il ne reste plus qu'à démontrer que le premier arbre de profondeur de ${}^tG$ est bien une composante fortement connexe. Notons $T$ ce premier arbre et $r$ sa racine. Tous les sommets de $T$ peuvent atteindre $r$ dans $G$ par définition de ${}^tG$, et comme $f[v]$ est le plus grand $f$, alors quelque soit $u \in T$, $\phi(u) = r$. Donc tous les sommets de $T$ font partie de la même CFC.

Maintenant, supposons un sommet $v$ appartenant à cette CFC. Alors on a $\phi(v) = r$ donc, il existe un chemin de $v$ à $r$ dans $G$, donc un chemin de $r$ à $v$ dans ${}^tG$. Ce chemin est forcément blanc au début de l'exécution de l'algorithme, donc $v$ est un fils de $r$. Ainsi $v \in T$.

On a donc démontré la validité de l'algorithme. Calculons rapidement sa complexité. La complexité du parcours en profondeur est $\mathcal{O}(|S| + |A|)$, l'inversion des arcs se fait en $\mathcal{O}(|A|)$. Comme $G$ et ${}^tG$ ont le même nombre d'arcs et de sommets, on a donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(G(S,A)) &= \mathcal{O}(|S| + |A|) + \mathcal{O}(|A|) + \mathcal{O}(|S| + |A|) \\ &= \mathcal{O}(|S| + |A|) \end{aligned}$$

**Exercice 6.10.2.** *2-SAT*

Le problème 2-SAT est défini de la manière suivante : on se pose la question de la satisfiabilité d'une formule booléenne en *Forme Normale Conjonctive* d'ordre 2 (2-FNC). Une telle formule est une *conjonction* de *clauses*, chaque clause étant elle-même constituée d'une *disjonction* de deux *littéraux*. Un littéral dans une formule booléenne est une variable ou sa négation.

Exemple : $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$
est une 2-FNC, satisfiable en mettant par exemple $x_1$ à vrai et $x_2$ à faux.

1 - **Une condition nécessaire**
En remarquant que chaque clause peut s'écrire de deux manières sous forme d'une implication entre deux littéraux, représenter la formule comme un graphe orienté où les sommets sont des littéraux et les arcs des implications.
→ Donner une condition nécessaire sur le graphe pour que la formule soit satisfiable.
On va montrer qu'il s'agit d'une condition suffisante.

2 - Montrer qu'une valuation $v$ qui satisfait la formule $F$ est constante sur une composante fortement connexe du graphe associé $G$.

3 - **Graphe des composantes fortement connexes**
On construit un graphe orienté $H$ associé au graphe $G$ de la manière suivante :
- Les sommets de $H$ sont les composantes fortement connexes de $G$.
- Il y a un arc de $X$ à $Y$ dans $H$ s'il existe un arc d'un sommet de $X$ vers un sommet de $Y$ dans $G$.

→ Montrer que $H$ est sans circuit.

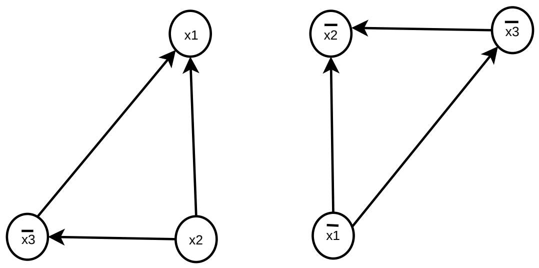
4 - **Tri topologique**
Les arcs induisent alors un ordre partiel sur les sommets de $H$ et cet ordre peut-être complété en un ordre total. L'algorithme du tri topologique est défini de la manière suivante : le graphe est parcouru en profondeur et les sommets classés par $f[u]$ décroissant en les insérant au fur et à mesure au début d'une liste chaînée.
→ Montrer que l'ordre total ainsi obtenu étend bien l'ordre partiel.
→ Donner la complexité de la construction de $H$ à partir de $G$ et du tri topologique.

5 - On définit la valuation $v$ de la manière suivante : si la variable $x$ est dans la composante $X$ et $\neg x$ dans la composante $Y$ alors on pose $v(x) = faux$ si $X < Y$ et $v(x) = vrai$ sinon.
→ Montrer que $v$ est définie de manière cohérente et conclure. Quelle est la complexité de 2-SAT ?

**Correction.**

1 - Une condition nécessaire

On représente la clause $l \vee l'$ par deux liaisons :
$\neg l' \to l$
$\neg l \to l'$
Ainsi, l'exemple $(x_1 \vee \neg x_2) \wedge (x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3)$ sera représenté par le graphe :




Une condition nécessaire pour que le graphe soit satisfiable est :

$y$ et $\neg y$ sont dans deux composantes connexes distinctes

2 - Une valuation satisfaisant la formule est constante

Montrons qu'une valuation $v$ qui satisfait la formule $F$ est constante sur une composante fortement connexe du graphe associé $G$.
Soit $v$ qui satisfait $F$, et supposons $x$ et $y$ sur la même composante connexe. Alors il existe un chemin de $x$ à $y$, i.e. une série d'implications de $x$ à $y$, et pout tout $w$ de ce chemin, on a $v(x) = v(w)$. En particulier, $v(x) = v(y)$.
Donc $v$ est constante sur chaque composante connexe.

3 - Graphe des composantes fortement connexes

- On construit $H$ de sorte que les sommets de $H$ sont les composantes fortement connexes de $G$, et qu'il existe un arc de $X$ à $Y$ dans $H$ s'il existe un arc d'un sommet de $X$ vers un sommet de $Y$ dans $G$.
- Montrons que $H$ n'a pas de circuit.
  Par l'absurde, s'il existe un circuit dans $H$, alors les composantes fortement connexes rencontrées sur ce circuit ne forment qu'une seule composante.
  En effet, soit $X$ et $Y$ deux de ces composantes. Il existe un chemin de $X$ à $Y$ dans $H$, donc il existe un chemin de tout sommet de $X$ à tout sommet de $Y$ dans $G$, i.e $X$ et $Y$ forment même composante connexe.
  Donc $H$ est sans circuit.

3 - Tri topologique

- Chaque composante connexe $X$ de $G$ est représentée par son aïeul $x$. L'ordre partiel impose que si $X \to Y$ dans $H$, alors $f(x) < f(y)$. Il suffit donc de montrer que pour tous $u, v \in G$, on a :
  $u \to v \Rightarrow f(u) > f(v)$
  On se place au moment où on explore l'arc $u \to v$ :
  - si $v$ est blanc : $u$ antécédent de $v \Rightarrow f(v) < f(u)$
  - si $v$ est noir : $f(v) < f(u)$ car $v$ a déjà été visité
  - si $v$ est gris : $u$ sera noir avant $v$ donc $f(u) < f(v)$, donc on a :
    $d(v) < d(u) < f(u) < f(v) \Rightarrow u$ descendant de $v$
    Il existe donc un cycle orienté entre $u$ et $v$. Soit $X$ la composante connexe contenant $u$

  et $Y$ celle contenant $v$. Alors il existe un cycle entre $X$ et $Y$, ce qui est impossible car $H$ est sans cycle.

  Donc l'ordre total étend bien l'ordre partiel.
- Complexité de la construction de $H$ :
  - On calcule les composantes fortement connexes de $G$ en $O(|S|+|A|)$
    A chaque $u \in S$, on associe $\phi(u)$.
  - $H$ est défini sur $\{\phi(u)\}$, et il faut parcourir tous les adjacents de chaque sommet $u$ de $G$ en ajoutant dans $H$ :
    $\phi(u) \to \phi(v)$ pout tout $u \to v$

  Donc $H$ se construit en $O(|S|+|A|)$.
- On définit la valuation $v$ par : si $x \in X$ et $\neg x \in Y$, alors $v(x) = faux$ si $X \; < Y$ et $v(x) = vrai$ sinon.
  Cette définition est cohérente :
  - si $X \; < Y$, alors $v(x) = faux$ ( et $vrai \Rightarrow Y$ toujours vrai)
  - si $Y \; < X$, alors $v(x) = vrai$ ( et $Y \Rightarrow vrai$ toujours vrai)
- Ainsi, la complexité de $2 - SAT$ est de l'ordre de $O(|S|+|A|)$.

# Chapitre 7

# Tables de hachage

## 7.1 Recherche en table

On a une table décrite par deux tableaux de taille fixe $N$, nom et tel, indicés en parallèle :

nom[i] a pour téléphone tel[i]

**Recherche séquentielle** Pour trouver un nom on parcourt la table

1. Coût au pire $n$, coût moyen $n/2$, où $n$ est le nombre d'éléments courant des deux tableaux
2. Par contre l'insertion d'un nouvel élément (avec test de débordement $n < N$) coûte $O(1)$

**Recherche dichotomique** On maintient le tableau des noms trié

1. Coût au pire en $\lceil \log n \rceil$
2. Par contre l'insertion d'un nouvel élément coûte $O(n)$ (il faut pousser les autres)

**Gestion dynamique**

- On veut construire une structure de données de taille $m$ pour stocker des clés (des chaînes de caractère en général) qui peuvent prendre leurs valeurs dans un univers de grande taille $n$
- Mais toutes les clés possibles ne seront pas utilisées ...
  $\Rightarrow$ on peut imaginer une fonction de distribution de cette utilisation (qui dépende de l'application visée)

L'application classique est en compilation. Les utilisateurs déclarent des variables, dont l'identificateur est une chaîne de caractères arbitraire. Impossible de préparer une table avec une case par chaîne potentielle. Pourtant, il faut pouvoir vérifier rapidement si une variable rencontrée a déjà été déclarée ou non.

## 7.2 Tables de hachage

**Donnée**

- Une table de hachage $T$ comporte $m$ slots $T[0], T[1], \ldots, T[m-1]$
- Chaque slot peut accueillir un nom, et pourra être étendu en cas de besoin
- En général, $T$ n'est que partiellement remplie

**Problème**

- L'univers des noms $X$ est grand, de taille $n \gg m$
- Pour un nom $x \in X$, on veut déterminer s'il figure dans $T$, et si oui trouver sa position $i$

**Fonction de hachage**

- Fonction $h : X \rightarrow \{0, 1, \ldots, m-1\}$
  1. facile à calculer
  2. avec une distribution d'apparence aléatoire
- Collision si $h(x) = h(y)$ pour $x \neq y$ (inévitable si $m < n$)

**Méthode de construction**

1. Interpréter les clés comme des entiers :

$$x = x_l \ldots x_1 x_0 \longrightarrow \nu(x) = x_l B^l + \ldots + x_1 B + x_0$$

2. Ramener $\nu(x)$ dans l'intervalle entier $[0, m-1]$ :
   - soit par division :
   $$h(x) = \nu(x) \bmod m$$
   - soit par multiplication :
   $$h(x) = \lfloor m \times \{A \times \nu(x)\} \rfloor$$

   où $0 < A < 1$ est une constante réelle bien choisie
   où $\{X\} = X - \lfloor X \rfloor$ est la partie fractionnaire de $X$

   Pour la multiplication, Knuth recommande $A = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0.618034$. Pour $m = 1000$ et $\nu(x) = 1999$, $A \times \nu(x) = 1235.44994...$ et $h(x) = 449$.

**Gestion des collisions** Deux solutions :

- Par chaînage des éléments (table de collision séparée ou liste chaînée)
- Par tentatives répétées jusqu'à trouver une place (adressage ouvert)

## 7.3 Collisions séparées

**Table des collisions auxiliaire**

- Les collisions sont listées dans une table `col` parallèle à la table `nom`
- Pour `i = h(x)`, si `nom[i]` $\neq$ `x`, la table des collisions donnera une autre entrée de la table `i' = col[i]` où on pourra continuer à chercher
- La table `col` est initialisée à `-1`, ce qui signifie l'absence de collision ultérieure.

**Insertion**

- Le premier élément `x` tel que `h(x) = i` est rangé en position $i$ de la table
- Les éléments suivants de même valeur $h$ sont rangés dans une partie réservée de la table, de l'indice $m$ à l'indice $Nmax - 1$. Il faut donc prévoir de déclarer des tableaux `nom`, `tel`, `col` de taille $Nmax$.

**Listes chaînées**

- A chaque slot de la table de hachage on gère une liste chaînée des éléments qui ont cette valeur $h$
- Conceptuellement, c'est la même méthode. En pratique c'est beaucoup plus naturel de faire appel à des listes

## 7.4 Adressage ouvert

**Méthode**

- En cas de collision, on part de $i = h(x)$ et on calcule un prochain candidat pour une place libre dans la table. On répète l'opération jusqu'à trouver une place libre
- Version simple : pour calculer la place suivante :

$$i \leftarrow (i+1) \bmod m$$

- Version élaborée :

$$i \leftarrow (i + h'(x)) \bmod m$$

où $h'$ est une deuxième fonction de hachage
- Contrainte : les valeurs testées

$$h(x) + k \times h'(x) \bmod m \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq m-1$$

doivent réaliser une permutation de $\{0, 1, \ldots, m-1\}$.
Par exemple prendre $m$ premier et poser :

$$\begin{aligned} &h(x) = x \bmod m \\ &h'(x) = 1 + (x \bmod (m-1)) \end{aligned}$$

**Analyse**

- Le taux d'occupation est $\alpha = \frac{n}{m}$, où $n$ est le nombre de clés présentes et $m$ le nombre de places. En adressage ouvert $n \leq m$, i.e. $\alpha =\leq 1$
- On suppose que toute suite d'examen de places successives est équiprobable (hachage uniforme)
- Le nombre moyen d'examen de places successives est au plus :
  1. Pour une recherche infructueuse : $\frac{1}{1-\alpha}$
  2. Pour une recherche fructueuse : $\frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha}$

**Preuve pour une recherche infructueuse**

- Dans ce cas, tous les examens sauf le dernier tombent sur une place occupée par une clé qui n'est pas la bonne, et le dernier examen tombe sur une place inoccupée
- Soit $p_i = \Pr\{\text{exactement } i \text{ examens accèdent des places occupées}\}$
Pour $i > n$, $p_i = 0$. Donc le nombre moyen cherché est

$$M = 1 + \sum_{i=0}^{+\infty} i p_i = 1 + \sum_{i=1}^{+\infty} q_i$$

où $q_i = \Pr\{\text{au moins } i \text{ examens accèdent des places occupées}\}$
- $q_1 = \frac{n}{m}$, $q_2 = \left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n-1}{m-1}\right)$
- $q_i = \left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n-1}{m-1}\right) \cdots \left(\frac{n-i+1}{m-i+1}\right) \leq \left(\frac{n}{m}\right)^i = \alpha^i$
- $M \leq 1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots = \frac{1}{1-\alpha}$

**Preuve pour une recherche fructueuse**

- Une recherche de la clé $k$ effectue les mêmes examens que lors de l'insertion de $k$ dans la table
- D'après ce qui précède, l'insertion du $i+1$-ème élément coûte au plus $\frac{1}{1-i/m} = \frac{m}{m-i}$
- D'où la valeur moyenne cherchée

$$M = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{m}{m-i} = \frac{m}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{m-i} = \frac{1}{\alpha}(H_m - H_{m-n})$$

- $\ln i \leq H_i = \sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j} \leq \ln i + 1$
- $M \leq \frac{1}{\alpha}(\ln m + 1 - \ln(m-n)) = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{m}{m-n} + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\ln\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha}$

# Chapitre 8

# $\mathcal{NP}$-Complétude

## 8.1 P versus NP

On distingue deux types de problèmes de décision :
- ceux qui peuvent être résolus en temps polynomial en la taille des données (classe $\mathcal{P}$)
- ceux pour lesquels on peut vérifier un certificat donnant la solution, en temps polynomial en la taille des données (classe $\mathcal{NP}$)

Bien sûr $\mathcal{P} \subset \mathcal{NP}$. A défaut de savoir si cette inclusion est stricte ou non, on considère la classe des problèmes NP-complets, qui sont les problèmes *les plus difficiles* de la classe $\mathcal{NP}$ : si on connaissait une solution polynomiale pour l'un d'entre eux, on en connaîtrait une pour tout problème de la classe, et on aurait l'égalité $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$. Le plus difficile est de trouver le premier problème NP-complet, et cela a été le travail de Cook qui a montré que SAT était complet (voir feuilles distribuées en cours). Ici, on va procéder par réduction, pour augmenter la liste des problèmes NP-complets. On verra ci-après 3-SAT, CLIQUE, VERTEX-COVER. On mentionne aussi CH, le problème du circuit hamiltonien (voir feuilles de cours). Enfin, on démontre la NP-complétude de trois problèmes de coloration de graphes : COLOR, 3-COLOR, et 3-COLOR-PLAN.

## 8.2 3-SAT

**Définition 9 (SAT).** *Soit $F$ une formule booléenne à $n$ variables $x_1, x_2, ..., x_n$ et $p$ clauses $C_i$ :*
*$F = C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_p$ où $C_i = x^*_{i_1} \vee x^*_{i_2} \vee ... \vee x^*_{i_{f(i)}}$ et $x^* = x$ ou $\overline{x}$*
*Existe-t-il une instanciation des variables telle que $F$ soit vraie ?*
*($\Leftrightarrow$ $C_i$ vraie pour tout $i$)*

Avec plusieurs variantes $\mathcal{NP}$-complètes :
- **SAT-$k$ :** SAT avec au plus k occurrences de chaque $x_i$
- **3-SAT :** SAT où chaque clause a 3 littéraux $C_i = x^*_{i_1} \vee x^*_{i_4} \vee x^*_{i_3}$
- **3-SAT NAE :** "not all equal", les trois variables de chaque clause ne sont pas toutes à la même valeur
- **3-SAT OIT :** "one in three", exactement une variable est VRAI dans chaque clause

*Remarque :* 2-SAT peut être résolu en temps polynomial

**Méthode de réduction** d'un problème $P$ à partir d'un problème $P'$ $\mathcal{NP}$-complet :

1. $P \in \mathcal{NP}$ : on vérifie en temps polynomial le certificat accompagnant une instance $I$ de $P$

2. $P$ est complet : on réduit à partir de $P'$. On transforme une instance $I_1$ de $P'$ en une instance $I_2$ de $P$
   (a) taille$(I_2) = \mathcal{P}($taille$(I_1))$
   (b) $I_1$ a une solution $\Leftrightarrow$ $I_2$ a une solution

**Théorème 12.** *3-SAT est $\mathcal{NP}$-complet*

**Preuve**. 1. 3-SAT $\in \mathcal{NP}$
Soit $I$ une instance de 3-SAT
taille$(I) = O(n+p)$
Certificat : valeur de chaque $x_i$
Vérification en $O(p)$

2. 3-SAT est complet
Réduction à partir de SAT, premier problème montré NP-complet par Cook.
Soit $I_1$ une instance de SAT
$n$ variables $x_1, ..., x_n$
$p$ clauses $C_1, ..., C_p$ de longueurs $f(1), ..., f(p)$
taille$(I_1) = O(n + \sum_{i=1}^{p} f(i))$
$C_i$ : clause de $P$ dans $I_1$
– 1 variable $x$ : soit $a_i$ et $b_i$ deux nouvelles variables
$x \vee a_i \vee b_i$
$x \vee \overline{a_i} \vee b_i$
$x \vee a_i \vee \overline{b_i}$
$x \vee \overline{a_i} \vee \overline{b_i}$
– 2 variables $x_1 \vee x_2$ : soit $c_i$ une nouvelle variable
$x_1 \vee x_2 \vee c_i$
$x_1 \vee x_2 \vee \overline{c_i}$
– 3 variables : aucun changement
– $k$ variables, $k > 3$, $C_i = x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_k$
soit $z_1^{(i)}, z_2^{(i)}, ..., z_{k-3}^{(i)}$ $(k-3)$ nouvelles variables
$x_1 \vee x_2 \vee z_1^{(i)}$
$x_3 \vee \overline{z_1^{(i)}} \vee z_2^{(i)}$
...
$x_{k-2} \vee \overline{z_{k-4}^{(i)}} \vee z_{k-3}^{(i)}$
$x_{k-1} \vee \overline{z_{k-3}^{(i)}} \vee x_k$

(a) taille$(I_2)$ linéaire en taille$(I_1)$
(b) $(\Rightarrow)$ : si $I_1$ a une solution c'est à dire une instanciation des $x_i$ telle que $\forall j$ $C_j$ soit vraie.
Une solution pour $I_2$ est :
$x_i \rightsquigarrow$ inchangé
$a_i \rightsquigarrow$ VRAI
$b_i \rightsquigarrow$ FAUX
$c_i \rightsquigarrow$ VRAI
$y_1 \vee ... \vee y_k$
soit $y_i$ le $1^{er}$ littéral vrai :

$z_1, ..., z_{i-2} \rightsquigarrow$ VRAI
$z_{i-1}, ..., z_{k-3} \rightsquigarrow$ FAUX

(c) ($\Leftarrow$) si $I_2$ a une solution :
Instanciation des $x_i, a_i, b_i, c_i, z_j^i \rightsquigarrow$ VRAI/FAUX
Les $x_1, ..., x_n$ marchent pour la formule de départ.

□

## 8.3 Clique

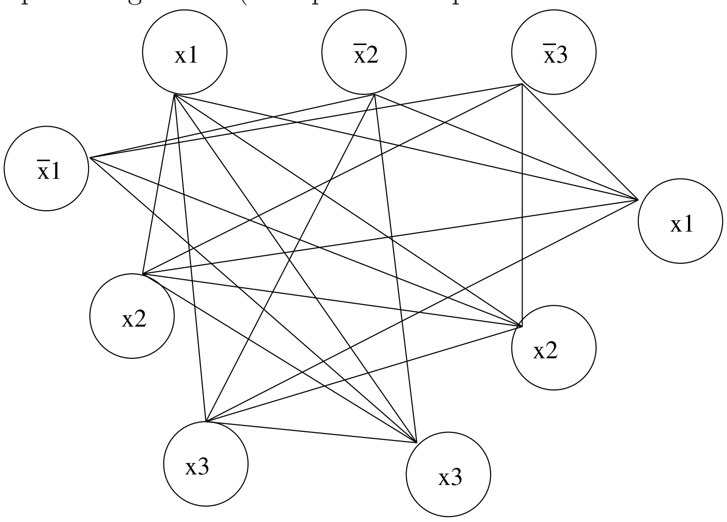
**Définition 10 (CLIQUE).** *Soit un graphe $G = (V, E)$, et un entier $k$ : $1 \leq k \leq |V|$*
*Existe-t-il une clique de taille k (un sous graphe complet de k sommets) ?*
*Taille d'une instance : $|V| + |E|$ ou $|V|$ (car $|E| \leq |V|^2$)*

**Théorème 13.** *CLIQUE est $\mathcal{NP}$-complet*

**Preuve.** 1. CLIQUE $\in \mathcal{NP}$
Certificat : liste des sommets de la clique.
Vérification en temps quadratique (pour chaque paire, l'arête doit appartenir à $E$).

2. CLIQUE est complet
Réduction à partir de 3-SAT
Soit $I_1$ une instance de 3-SAT avec $n$ variables booléennes et $p$ clauses de taille 3
Exemple du Cormen : $C_1 \wedge C_2 \wedge C_3$
$C_1 = x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$
$C_2 = \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$
$C_3 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$

3 sommets pour chaque clause, et une arête entre deux sommets si et seulement si :
(i) ils ne font pas partie de la même clause
(ii) ils ne sont pas antagonistes (ne représentent pas une variable et sa négation)




$I_2$ graphe à $3p$ sommets.
taille($I_2$) polynomiale en taille($I_1$).
3-SAT$\Rightarrow$ k-Clique : on sélectionne un sommet correspondant à une variable vraie dans chaque clause, et on a bien une clique, car deux de ces sommets ne sont pas contradictoires.
k-Clique$\Rightarrow$ 3-SAT : si on a une clique de taille k, alors il y a un sommet par clause. On le

sélectionne pour instancier les variables, et c'est cohérent car on ne fait pas ainsi de choix contradictoire.

□

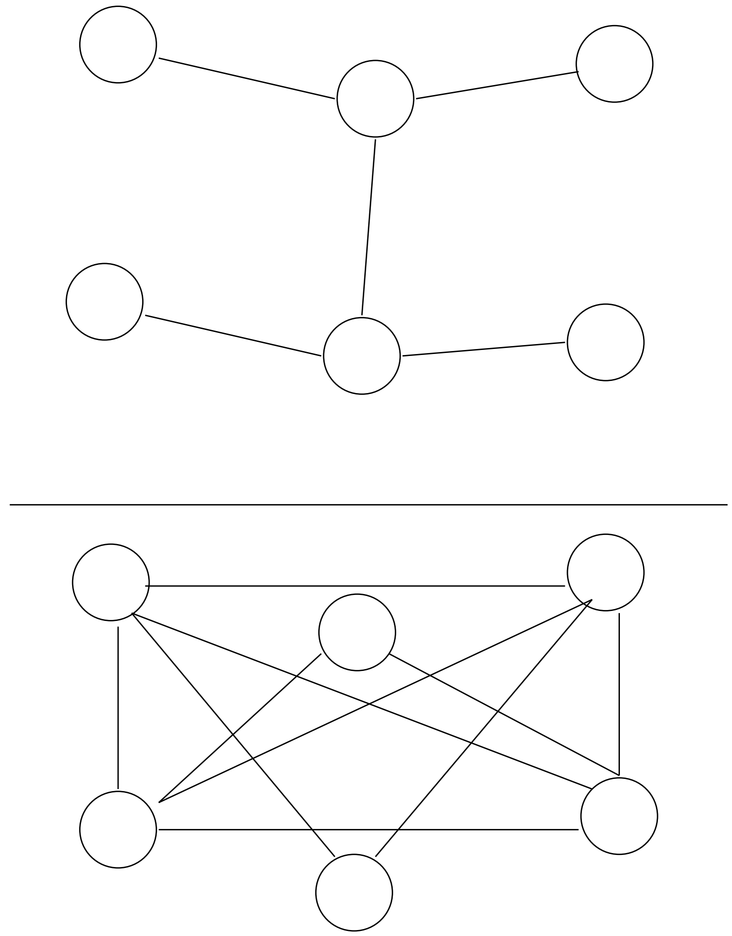
## 8.4 Couverture par les sommets

**Définition 11 (VERTEX-COVER).** *Soit un graphe $G = (V, E)$, et un entier $k$ : $1 \leq k \leq |V|$ Existe-t-il $k$ sommets $v_{i_1}, ..., v_{i_k}$ tels que $\forall e \in V$, $e$ est adjacente à l'un des $v_{i_j}$ ?*

**Théorème 14.** *VERTEX-COVER est $\mathcal{NP}$-complet*

**Preuve**.

1. VERTEX-COVER $\in \mathcal{NP}$
   Certificat : liste des $k$ sommets
   Pour chaque sommet $v \in V$ : soit $v = v_{i_j}$, soit $\exists j \ / \ (v, v_{i_j}) \in E$
   La vérification se fait en $n * k$



2. Le graphe G a une clique de taille K $\Leftrightarrow$ Le complémentaire de G a une Vertex Cover de taille $|V| - K$.

□

## 8.5 Circuit hamiltonien

**Définition 12 (CH).** *Soit un graphe $G = (V, E)$ Existe-t-il un circuit hamiltonien dasn G, c'est à dire un chemin qui visite tous les sommets une fois et une seule et revient à son point de départ ?*

**Théorème 15.** *CH est $\mathcal{NP}$-complet*

**Preuve.** 1. CH $\in \mathcal{NP}$ : facile.

2. Réduction depuis 3-SAT (cf. feuilles distribuées en cours)

□

## 8.6 Coloration de graphes

Le problème général :

**Définition 13 (COLOR).** *Soit $G = (V, E)$ un graphe et $K$ une borne (comprise entre 1 et $|V|$). Peut-on colorier les sommets de $G$ avec $K$ couleurs ? Le problème est d'associer à chaque sommet $v \in V$ un nombre (sa couleur) $color(v)$ compris entre 1 et $K$, de telle sorte que deux sommets adjacents ne reçoivent pas la même couleur :*

$$(u, v) \in E \Rightarrow color(u) \neq color(v)$$

On peut toujours supposer $K \leq |V|$, ce qui permet de dire que la taille d'une instance de COLOR est $O(|V|+|E|)$, sans se soucier du $\log K$, ou encore $O(|V|)$, puisque $|E|$ est polynomial en $|V|$.

**Définition 14 (3-COLOR).** *Soit $G = (V, E)$ un graphe. Peut-on colorier les sommets de $G$ avec 3 couleurs ?*

Prendre un instant de réflexion pour comprendre pourquoi la NP-complétude de COLOR n'entraîne pas automatiquement celle de 3-COLOR.

**Définition 15 (3-COLOR-PLAN).** *Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire (on peut le dessiner sans que les arêtes ne se coupent). Peut-on colorier les sommets de $G$ avec 3 couleurs ?*

Ici, la restriction est sur la structure du graphe, pas sur le nombre de couleurs. Avant de démontrer ces théorèmes, notons qu'on a vu plusieurs heuristiques gloutonnes pour colorier des graphes (avec un nombre de couleurs supérieur à l'optimal) au Paragraphe 4.2.

### 8.6.1 COLOR

**Théorème 16.** *COLOR est NP-complet*

**Preuve.** a) COLOR est dans NP.
Une instance $I$ de COLOR est une paire $(G, k)$ de taille $\mid V \mid + \mid E \mid + \log k$. Comme certificat on peut choisir une liste des couleurs des sommets. On peut vérifier en temps linéaire $O(\mid V \mid + \mid E \mid)$ si pour chaque arête $(x, y)$ de $E$ la condition $color(x) \neq color(y)$ est vraie et si la somme des couleurs utilisées est égale à $k$.
b) Réduction à partir de 3-SAT.
On se donne une instance $I_1$ de 3-SAT avec $p$ clauses $C_k,\ k = 1, \ldots, p$, et $n$ variables $x_1, \ldots, x_n$. Comme on a le droit d'ignorer les instances «faciles» on peut supposer $n \geq 4$. A partir de cette instance on construit un graphe $G = (V, E)$ avec les $3n + p$ sommets

$$x_1, \ldots, x_n,\ \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n,\ y_1, \ldots, y_n,\ c_1, \ldots, c_p$$

et les arêtes

$$(x_i, \overline{x}_i)\ \forall i = 1, \ldots, n$$

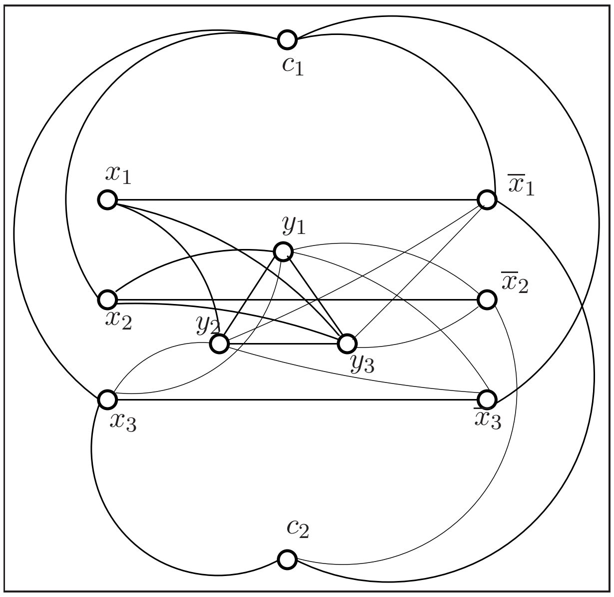



FIG. 8.1 – Exemple : Le graphe construit de la formule $(x_1 \vee \overline{x}_2) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$ Pour simplifier l'image on a choisi $k = 3$.

$$(y_i, y_j)\ \forall i, j = 1, \ldots, n,\ \ i \neq j$$
$$(y_i, x_j)\ \forall i, j = 1, \ldots, n,\ \ i \neq j$$
$$(y_i, \overline{x}_j)\ \forall i, j = 1, \ldots, n,\ \ i \neq j$$
$$(x_i, c_k)\ \forall x_i \notin C_k$$
$$(\overline{x}_i, c_k)\ \forall \overline{x}_i \notin C_k.$$

Un exemple pour la construction de ce graphe est donné en figure 8.1. La taille de $I_2$ est polynomiale en la taille de $I_1$ comme $\mid V \mid = O(n + p)$.
On va prouver que $I_1$ a une solution ssi $G$ est coloriable avec $n + 1$ couleurs.

$\Rightarrow$ Supposons que $I_1$ a une solution : il y a une instantiation des variables t.q. $C_k$ est vraie pout tout $k$. On pose

$$\mathit{color}(x_i) = i \text{ si } x_i \text{ est vraie}$$
$$\mathit{color}(x_i) = n + 1 \text{ si } x_i \text{ est fausse}$$
$$\mathit{color}(\overline{x}_i) = i \text{ si } \overline{x}_i \text{ est vraie}$$
$$\mathit{color}(\overline{x}_i) = n + 1 \text{ si } \overline{x}_i \text{ est fausse}$$
$$\mathit{color}(y_i) = i$$

et pour $\mathit{color}(c_k)$ on choisit la couleur d'une variable qui met la clause $C_k$ à vraie.
Montrons que cette allocation des couleurs réalise une coloration valide du graphe. Le seul problème pourrait venir des arêtes entre les $x$ (ou les $\overline{x}$) et les clauses. Soit $C_p$ une clause coloriée à $i$ à cause d'une variable $x_i$ ou $\overline{x}_i$ qui la met à vraie, donc qui est aussi coloriée $i$. Mais cette variable est dans la clause : alors l'arête entre cette variable et la clause n'existe pas. On a l'arête entre la clause et l'opposé de la variable, mais celle dernière est colorée à $n$+1, donc pas de conflit.

$\Leftarrow$ Supposons maintenant qu' il y a un coloriage de $G$ à $n + 1$ couleurs.

Lemme 1. Les $y_i$ forment une clique, donc ont des couleurs différentes. Quitte à renuméroter les couleurs, $color(y_i) = i$.

Lemme 2. $x_i$ et $\overline{x}_i$ ont pour couleur $i$ ou $n+1$ et ce n' est pas la même.
En effet, $x_i$ et $\overline{x}_i$ sont reliés entre eux et avec tous les $y_j$, $j \neq i$, on peut en déduire que $color\begin{pmatrix} x_i \\ \overline{x}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ n+1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} n+1 \\ i \end{pmatrix}$

Lemme 3. $c_k$ ne peut pas avoir la couleur $n+1$. En effet, $n \geq 4$, donc il y a un $x_i$ t.q. $x_i \notin C_k$, $\overline{x}_i \notin C_k$.

Supposons alors que $color(c_i) = k \in 1, \ldots, n$. On pose

$$x_i = \begin{cases} 1 \text{ si } color(x_i) = i \\ 0 \text{ si } color(x_i) = n+1 \end{cases}$$

et (forcément)

$$\overline{x}_i = \begin{cases} 1 \text{ si } color(\overline{x}_i) = i \\ 0 \text{ si } color(\overline{x}_i) = n+1. \end{cases}$$

Alors la variable qui donne $c_i$ sa couleur est dans la clause $C_i$ (sinon ils sont reliées) et met cette clause à vraie, car sa couleur n'est pas $n+1$. Comme c'est vrai pour chaque clause $C_i$, $I_1$ a une solution.

□

### 8.6.2 3-COLOR

**Théorème 17.** *3-COLOR est NP-complet*

**Remarque 6.** *Le fait que COLOR est NP-complet ne dit rien. Par exemple, 2-COLOR est polynomial (voir Paragraphe 4.2).*

**Preuve**. a) Comme COLOR est dans NP, 3-COLOR est dans NP.
b) On fait une réduction à partir de 3-SAT en utilisant le gadget de la figure 8.2.

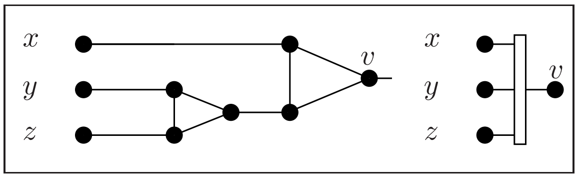



FIG. 8.2 – A gauche le gadget, à droite son symbole.

**Lemme 8.** *Le gadget vérifie les deux propriétés suivantes :*
*i) Si $x = y = z = 0$ alors $v$ est colorié à 0.*
*ii) Toute autre entrée $(x, y, z)$ permet à colorier $v$ à 1 ou 2.*

**Preuve**. i) Si $x = y = z = 0$ alors on ne peut que colorier le gadget comme suivant (fig. 8.3) :

□

Avec ce gadget on construit à partir d'une instance $I_1$ de 3-SAT avec $p$ clauses $C_k, k = 1, \ldots, p$ et $n$ variables $x_i, i = 1, \ldots, n$ une instance de 3-COLOR comme graphe $G$ avec $1 + 2n + 6p + 1 = O(n+p)$ sommets (voir fig. 8.4).

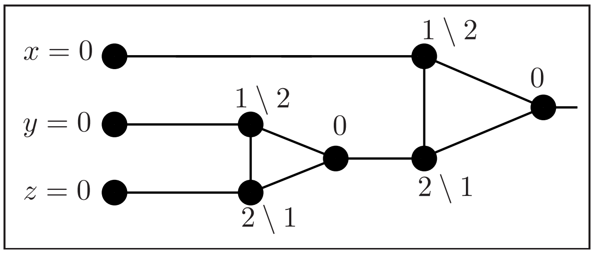



FIG. 8.3 – Si $x = y = z = 0$ alors $v = 0$

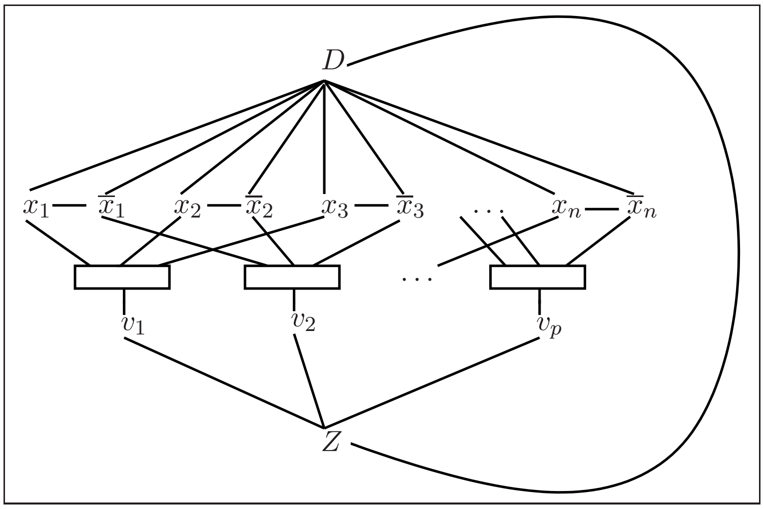



FIG. 8.4 – Le graphe $G$ construit à partir de l'instance $I_1$ de 3-SAT. Le gadget $k$ est relié avec les variables de la clause $C_k$ de $I_1$.

On va prouver que $I_1$ a une solution ssi $G$ est 3-coloriable.

„$\Rightarrow$". On suppose que $I_1$ a une solution, c. à. d. une instantiation qui met toutes les clauses à vraies. On pose $color(x_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } x_i \text{ vrai} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ et $color(\overline{x}_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } \overline{x}_i \text{ vrai} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Comme il y a une variable à vrai dans chaque clause, il y a pour chaque gadget une entrée qui est non nulle. La propriété ii) du gadget permet alors d'avoir $v_i \neq 0 \ \forall \ i \in 1, \dots, \ p$. En posant $color(D) = 2$ et $color(Z) = 0$ on obtient un coloriage de G à trois couleurs.

„$\Leftarrow$". On suppose que $G$ a une coloration à trois couleurs. En permutant les couleurs on peut supposer que $color(D) = 2$, $color(Z) = 0$, $color\left( \begin{matrix} x_i \\ \overline{x}_i \end{matrix} \right) = \left( \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right)$ ou $\left( \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} \right)$. Car $color(Z) = 0$ la couleur des $v_i$ doit être 1 ou 2. La propriété i) permet de conclure que dans chaque clause il y a une variable à vraie. Par conséquence, l'instantiation $x_i = \begin{cases} 1 \text{ si } color(x_i) = 1 \\ 0 \text{ si } color(x_i) = 0 \end{cases}$, $\overline{x}_i = \begin{cases} 1 \text{ si } color(\overline{x}_i) = 1 \\ 0 \text{ si } color(\overline{x}_i) = 0 \end{cases}$ donne une instantiation des $x_i$ qui met toutes les clauses à vraies. $\square$

### 8.6.3 3-COLOR-PLAN

**Théorème 18.** *3-COLOR-PLAN est NP-complet*

**Preuve**. a) Comme 3-COLOR est dans NP, 3-COLOR-PLAN est dans NP.
b) On fait une réduction à partir de 3-COLOR en utilisant le gadget de la figure 8.5, appelé $W$.

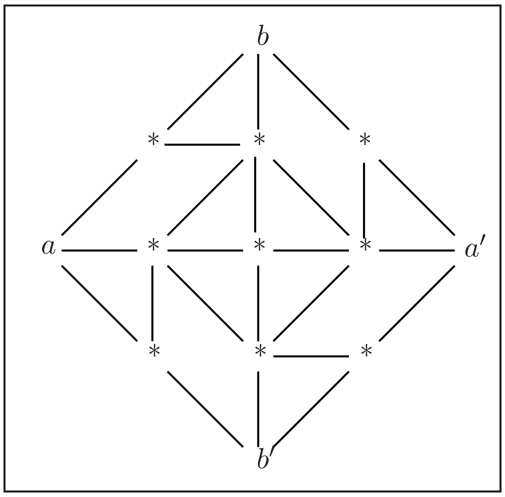



FIG. 8.5 – Le gadget $W$ avec 13 sommets

**Lemme 9.** *Le gadget W vérifit les deux propriétés suivantes :*
*i) Pour tout 3-coloriage de W les sommets a et $a'$ ainsi que b et $b'$ ont la même couleur.*
*ii) Si $(a, a')$ et $(b, b')$ ont la même couleur donnée, on peut completer ce coloriage en un 3-coloriage de W.*

**Preuve**. ii) Si on donne par exemple $a = a' = 0$, $b = b' = 1$, on peut completer le coloriage comme en figure 8.6. Si on donne $a = a' = 0$, $b = b' = 0$, on peut completer le coloriage comme

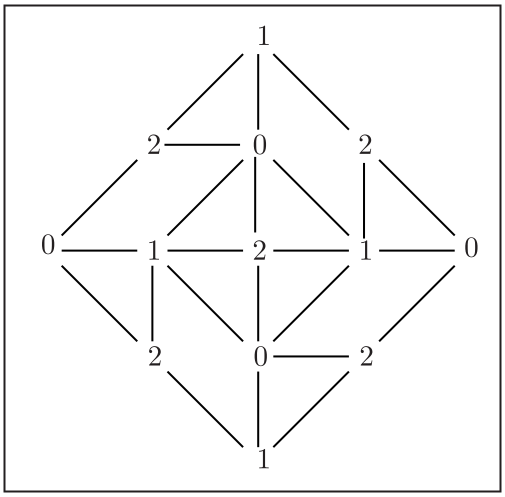



FIG. 8.6 – 3-coloriage de $W$ avec $a = a' = 0$, $b = b' = 1$

dans la figure 8.7. Les autres cas sont symétriques. □

Soit maintenant $I_1$ une instance de 3-COLOR, c. à. d. un graphe $G$. A partir de $I_1$ on construit une instance $I_2$ de 3-COLOR-PLAN comme graphe $G$ en remplaçant les arêtes qui se croissent par $W$ (voir fig. 8.8). Précisément, une arête $(u, v)$ qui croise $(u', v')$ est remplacée par l'arête $(u, a)$ suivie du gadget $W$, avec $v = a'$ : on met une arête entre $u$ et l'extrémité gauche

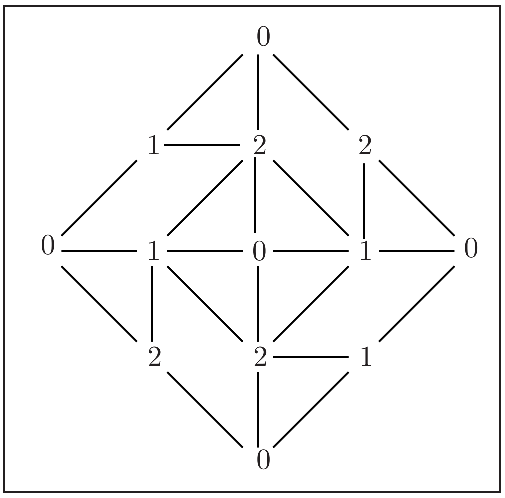



FIG. 8.7 – 3-coloriage de $W$ avec $a = a' = 0$, $b = b' = 0$

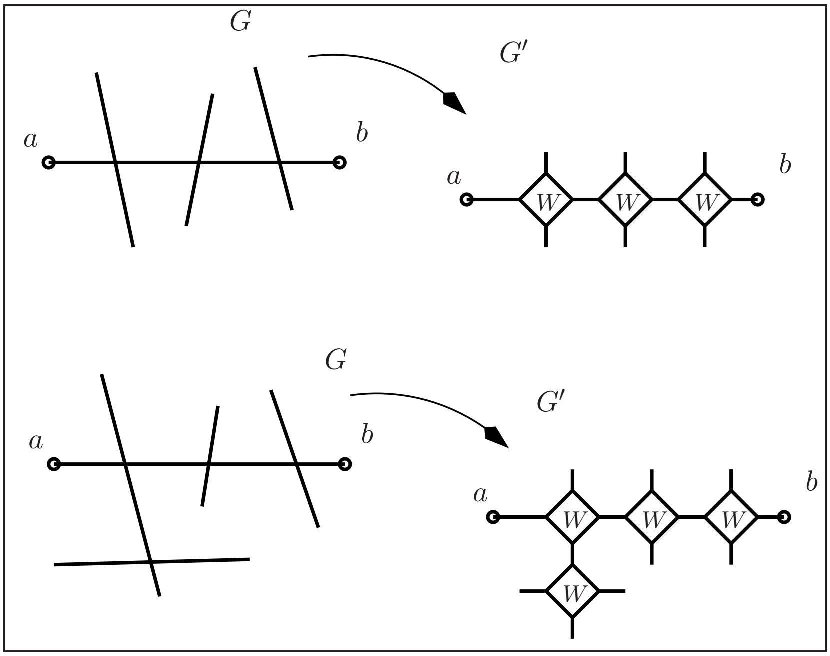



FIG. 8.8 – On transforme le graphe $G$ en un graphe planaire en remplaçant les arêtes qui se croissent par le gadget $W$

du gadget, et on confond $v$ et l'extrémité droite du gadget. De même pour $(u', v')$ : il y a une arête entre $u'$ et l'extrémité nord $b$ du gadget, mais $v' = b'$. De cette façon, comme $a$ et $a'$ ont la même couleur, $u$ et $v$ en ont une différente. Enfin, quand il y a plusieurs arêtes, on place plusieurs gadgets en série, en confondant l'extrémité droite d'un gadget avec l'extrémité gauche du gadget suivant.

$G$ est 3-coloriable ssi $G'$ est 3-coloriable.
$\Rightarrow$ Si $G$ est 3-coloriable, la proposition i) donne la solution.
$\Leftarrow$ Si $G'$ est 3-coloriable, la proposition ii) donne la solution.

$\square$

## 8.7 Exercices

**Exercice 8.7.1.** *Complexité de SUBSET-SUM*

Montrer que le problème suivant SUBSET-SUM est $\mathcal{NP}$-complet.

**SUBSET-SUM**
Entrée : un ensemble fini $S$ d'entiers positifs et un entier objectif $t$.
Question : existe-t-il un sous-ensemble $S' \subseteq S$ tel que $\sum_{x\in S'} x = t$ ?

*Indication :* vous pouvez par exemple effectuer une réduction à partir de 3-SAT. A partir d'un ensemble de clauses $C_0, ..., C_{m-1}$ sur les variables $x_0, ..., x_{n-1}$, considérer $S$ l'ensemble des entiers $v_i = 10^{m+i} + \sum_{j=0}^{m-1} b_{ij} 10^j$ et $v'_i = 10^{m+i} + \sum_{j=0}^{m-1} b'_{ij} 10^j$, $0 \leq i \leq n-1$, où $b_{ij}$ (resp. $b'_{ij}$) vaut 1 si le littéral $x_i$ (resp. $\overline{x_i}$) apparaît dans $C_j$ et 0 sinon, et des entiers $s_j = 10^j$ et $s'_j = 2.10^j$, $0 \leq j \leq m-1$. Trouver alors un entier objectif $t$ tel qu'il existe un sous-ensemble $S' \subseteq S$ de somme $t$ si et seulement si l'ensemble initial de clauses est satisfiable. Conclure. Quels autres entiers auraient aussi marché ?

**Correction.**

SUBSET-SUM est évidemment NP.

Pour montrer qu'il est NP-complet nous allons suivre l'indication et effectuer une réduction à partir de 3-SAT.
Pour ce faire nous allons commencer en transformant les données de 3-SAT en chiffre.

Soit $C_0, \ldots, C_{m-1}$ les clauses et $x_0, \ldots, x_{n-1}$ les variables de 3-SAT. On construit $v_i$ et $v'_i$ de la manière suivante :
$v_i = 10^{m+i} + \sum_{j=0}^{m-1}(b_{ij}10^j)$ et $v'_i = 10^{m+i} + \sum_{j=0}^{m-1}(b'_{ij}10^j)$, $1 \leq i \leq n-1$ avec

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i \text{ apparaît dans } C_j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } b'_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } \overline{x_i} \text{ apparaît dans } C_j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour mieux comprendre ce qu'on fait, on peut imaginer qu'on crée des (m+n)-upplets dont les n premières cases il n'y à que des zéros sauf à un endroit $i$ qui permet de savoir de quelle variable on parle, que ce soit $x_i$ ou $\overline{x_i}$ , et les m-suivant permettent de savoir si la variable est dans les clauses correspondantes.

Désormais on va sommer certains $v_i$ et certains $v'_i$, en fait on somme n entier, une par littéral, $T = \sum_{j=0}^{n-1}(w_i)$ où $w_i$ vaut soit $x_i$ soit $\overline{x_i}$. T est un nombre qui commence par n "1" et est suivit de m chiffres compris entre 0 et 3 (comme on est parti de 3-SAT il y a au plus 3 variables par clause et ces m chiffres correspondres exactment au nombre de littéral qui met cet clause à vrai). Si on part d'une solution du problème 3-SAT, et qu'on prend $v_i$ si $x_i$ est vrai et $v'_i$ si $x_i$ est faux, on remarque que c'est m chiffres sont compris entre 1 et 3.

A partir de là on se demande comment faire la différence entre les sous-ensembles donnant un somme qui contient un "0" de ceux donnant une somme sans "0" qui sont exactment les sous-ensembles correspondant à un certificat du problème 3-SAT par la bijection évident $v_i \in$ S $\leftrightarrow$ $x_i$ est vrai.
C'est à cela que servent les $s_j = 10^j$ et $s'j = 2.10^j$. En prenant $t = 1 \ldots 14 \ldots 4$ et en ne réfléchissant que sur les $m$ chiffres de droite de $T$ on voit que :
-à partir de 3 on peut avoir 4,3 + 1
-à partir de 2 on peut avoir 4,2 + 2

-à partir de 1 on peut avoir 4,$1+1+2$
-à partir de 0 on ne peut avoir 4.
(Cette réflection est la même qui si on considère les nombres comme des n+m-upplets)

Le problème 3-SAT est donc réduit en SUBSET-SUM avec $S = \{v_i | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v'_i | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{s_j | 1 \leq j \leq m-1\} \cup \{s_j | 1 \leq j \leq m-1\}$ et $t = 1 \ldots 14 \ldots 4$

On a ainsi, que si on trouve une solution du problème 3-SAT, on a une solution du problème SUBSET-SUM en prenant la bijection precédente, et en completant avec les $s_j = 10^j$ et $s'j = 2.10^j$. Réciproquement, si on trouve un sous-ensemble S' de S tels que si $\sum_{x \in S'}(x) = t = 1 \ldots 14 \ldots 4$, en prenant $\tilde{\mathrm{S}} = S \cap (\{v_i | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{v'_i | 1 \leq i \leq n-1\})$ on a nécessairement $T = \sum_{x \in S'}(x)$ qui est nombre commencant par n "1" et suivit de m chiffre compris entre 1 et 3 (ni 0 car sans les "$s$" on perd au plus 3 car 4 ne sont plus car en sans les "$s$", on atteind au mieux 3), ce qui montre que comme les aucun "0" n'apparrait, les instances de 3-SAT peuvent toutes êtres mises à vrai, trouvé à l'aide de la bijection citée plus haut, donc à partir du certificat de ce problème SUBSET-SUM on retrouve un certificat du problème 3-SAT de départ.

La réduction précédente est polynomiale car on passe de n variables et m clauses à 2n+2m entiers de m chiffres, SUBSET-SUM est donc NP-complet.

Remarques : - On peut faire le même travail dans toutes les autres bases qui n'introduisent pas de problèmes dues aux phénomènes de retenue.
-On peut aussi remplacer les "4" dans t par nimporte quel autre chiffre supérieur à 4, à condition de rajouter des "$s$" en nombre suffisant. -On peut aussi faire des $\tilde{s_i} = 10^{m+i}$ et sans changer t, ça remplace les variables dont pour lesquels peut choisir n'importe que booléen.

**Exercice 8.7.2.** *Variantes de 3-SAT*

Montrer la $\mathcal{NP}$-complétude des deux variantes de 3-SAT suivantes :

1. **3-SAT NAE** (*not all equal*), où l'on impose que les trois littéraux de chaque clause ne soient pas toutes à la même valeur ;
2. **3-SAT OIT** (*one in three*), où l'on impose qu'exactement un littéral soit à VRAI dans chaque clause.

**Correction.**

**1. 3-SAT NAE**

Evidemment 3-SAT NAE est NP.

Pour montrer qu'il est NP-complet, et contrairement à toute attente, nous allons effectuer une reduction à partir de 3-SAT de la manière suivante :

Pour chaque clause, $a \wedge b \wedge c$ du problème 3-SAT, on créé les instances $a \wedge b \wedge x$ et $c \wedge \overline{x} \wedge f$ où $f$ est global (ie $f$ est la même pour chaque clause créée ainsi)

S'il existe une instanciation des variables qui met toutes les clauses à vrai, il en existe aussi une pour sa réduction, pour cela, il suffit de prendre $x = \overline{a \cup b}$, avec les notations ci-dessus, de plus si $a$ et $b$ sont à vrai, $x$ sera à faux, et donc pour la seconde clause sera mis a vrai par $\overline{x}$, on fini en prenant $f$ toujours à faux, on a donc une bonne instanciation pour 3-SAT NAE.

Réciproquement, si on a un bonne instanciation du problème 3-SAT NAE (réduction du problème 3-SAT) il existe un bonne instanciation pour le problème 3-SAT d'origine. En effet si $f$ est à faux soit $c$ est à vrai et donc la clause $a \wedge b \wedge c$ est vrai, soit $c$ est à faux donc $\overline{x}$ est à vrai, $x$ est donc à faux, d'où soit $a$ soit $b$ est à vrai et donc la clause $a \wedge b \wedge c$ est à vrai, par contre si $f$ est à vrai, on prend toutes les variables du problème NAE et on prend leur négation. Cette instanciation, met toujours NAE à vrai, car comme "not all equal" une variable fausse au moins par clause qui est à vrai, et on recommence comme ci-dessus.

Ce qui précède montre que tout problème 3-SAT peut se réduire polynomialement (on multiplie le nombre de clause par deux, et on rajoute une variable plus une par clauses de départ) en un problème 3-SAT NAE équivalent, 3-SAT NAE est donc NP-complet.

**2. 3-SAT OIT**

On fait comme le cas précédent, sauf qu'à partir de $a \wedge b \wedge c$ on créé les trois clauses $a \wedge x \wedge y$, $\overline{b} \wedge x \wedge x'$ et $\overline{c} \wedge y \wedge y'$

Pour commencer on va montrer que s'il existe une bonne instanciation pour le problème 3-SAT de départ, il en existe une pour sa réduction à 3-SAT OIT.

C'est assez simple à montrer une fois qu'on connait la transformation, par contre elle est un peu longue à trouver. En effet, pour chaque clause de $a \wedge b \wedge c$ 3-SAT , si $a$ est à vrai on met les variables $x$ et $y$ (avec les notations précédentes) à faux, et on donne la valeur de $b$ à $x'$ et celle de $c$ à $y'$ ($a$, $b$ et $c$ restent inchangées d'un problème à l'autre) ; et si $a$ est à faux, alors soit $b$, soit $c$ est à vrai. Comme la construction est symétrique, on supposera que $b$ est à vrai, $x$ et $x'$ sont donc mis à faux, donc $y$ doit être mis à vrai, et $y'$ à faux. On a alors exactement une variable à vrai dans les trois instances, ça se passe comme ça dans chaque instance, et vu qu'on ne touche à aucun des variables directment associées à celle du problème 3-SAT, il n'y a pas de problème.

Dans l'autre sens, on va montrer que si on a une instanciation qui permet de répondre oui au problème 3-SAT OIT obtenue à partir d'un problème 3-SAT par la contruction explicitée plus haut alors on en a un pour ce problème 3-SAT. En effet on ne peut avoir aucune clause $a \wedge b \wedge c$ à faux car cela signifie que $a$, $b$ et $c$ sont faux, ce qui signifie que dans les clauses du 3-SAT OIT équivalentes on a $x$ et $x'$ à faux à cause de $\overline{b}$ (dans la deuxième clause), et de même, on a $y$ et $y'$ à faux à cause de $\overline{c}$ (dans la troisième clause), ce qui donne que la première clause est fausse, il y a donc contradiction.

On a donc équivalence entre entre les deux problèmes. Il y a un certificat pour un problème 3-SAT si et seulement il y en a une pour sa réduction vue précédement, en un problème 3-SAT OIT. De plus la réduction est polynomiale (on multiplie le nombre de clause par trois, et on rajoute six variables par clauses de départ).
Ce qui précède montre que tout problème 3-SAT peut se réduire polynomialement en un problème 3-SAT OIT équivalent, 3-SAT OIT est donc un problème NP-complet.

Remarque : une fois qu'on à montré que 3-SAT OIT est NP-complet, le problème 1 deviens plus facile, car on démontre que SUBSET-SUM est NP-complet en faisant la même construction, sans les $s_i$ et $s_i'$, et en prenat t=1. . . 11 . . . 1

**Exercice 8.7.3.** *SAT-n*

On appelle SAT-n le problème SAT restreint aux formules qui n'ont pas plus de $n$ occurences de la même variable.

1 - Montrer que SAT-3 est au moins aussi dur que SAT. En déduire que pour tout $n \geq 3$, SAT-n est $\mathcal{NP}$-complet.

2 - Soit $x$ une variable apparaissant dans une formule $F$ de SAT-2. Trouver une formule équivalente à $F$ et dans laquelle la variable $x$ n'apparaisse plus. En déduire un algorithme polynomial pour SAT-2.

**Correction.**

1. **SAT-3**

SAT-3 est trivialement NP.

Pour montrer qu'il est NP-complet, on d'un problème de SAT et pour chaque littéral $x_i$ apparaissant k fois avec k avec $k > 3$ , on applique l'algorithme suivant :
on remplace les occurences de $x_i$ par k nouveaux littéraux $y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}$, et on rajoute les clauses $y_{i_1} \wedge \overline{y_{i_2}}, \ldots, y_{i_{k-1}} \wedge \overline{y_{i_k}}$ et $y_{i_k} \wedge \overline{y_{i_1}}$.

Les nouveaux littéraux apparaissent alors 3 fois chacun (une fois à la place de $x_i$, et deux fois dans les nouvelles clauses). De plus les nouvelles clauses entrainent que les $y_{i_j}$ prennent tous la même valeur : si $y_{i_j}$ est vrai, alors $y_{i_{j-1}}$ egalement, et inversement, si $y_{i_j}$ est faux, alors $y_{i_{j+1}}$ doit l'être aussi (en toute rigueur on devrait rajouter des modulos k), et comme les clauses sont cycliques, on obtient que tous ces littéraux ont la même valeur.

Enfin, si n est le nombre de littéraux, et m le nombre de clauses, le nouveau problème obtenu comporte au plus nm littéraux et (m+nm) clauses, donc une instance de SAT se réduit polynomialement en une instance SAT-3 équivalente, et comme SAT-3 est NP, SAT-3 est NP-complet.

Et comme pour tout $n \geq 3$, SAT-3 est un cas particulier de SAT-n, SAT-n est NP-complet.

2. **SAT-2**

Soit $x$ une variable d'un système de clauses F de SAT-2, on transforme F selon les cas de sorte que le système obtenue soit satisfiable si et seulement si le système initial l'était :
- si $x$ (ou $\overline{x}$) n'apparait qu'une seule fois, on supprime la clause dans laquelle il apparait, car on est libre de mettre $x$ (ou $\overline{x}$), donc toute la clause à vrai.
- si $x$ (ou bien $\overline{x}$) apparait 2 fois dans une même clause, ou dans 2 clauses distinctes, on supprime la ou les clauses, pour la même raison.
- si $x$ et $\overline{x}$ apparaissent dans la même clause, on supprime la clause car elle est toujours à vrai.
- si $x$ et $\overline{x}$ apparaissent dans 2 clauses distinctes, $x \vee C_1$ et $\overline{x} \vee C_2$, alors le système de clause est satisfiable si et seulement si au moins des deux clause $C_1$ ou $C_2$ peut être mis à vrai en même temps que les autres clause (pour l'autre on choisit $x$ pour compléter), ainsi :
$\rightarrow$ si $C_1 = C_2 = \emptyset$ alors le système n'est pas satisfiable.
$\rightarrow$ sinon on remplace les 2 clauses par la nouvelle clause $C_1 \vee C_2$.

On a ainsi défini un algorithme en n étapes (où n est le nombre de littéraux), pour lequel on décide à chaque étape de la valeur d'un littéral avec une complexité m (où m est le nombre de clauses) : on peut donc résoudre SAT-2 en $\bigcirc(nm)$.

**Exercice 8.7.4.** *De la $\mathcal{NP}$-complétude*

Montrer que les problèmes suivants sont NP-complets :

**Chevaliers de la table ronde** Etant donnés $n$ chevaliers, et connaissant toutes les paires de féroces ennemis parmi eux, est-il possible de les placer autour d'une table circulaire de telle sorte qu'aucune paire de féroces ennemis ne soit côte à côte ?

**Deux cliques** Etant donné un graphe $G = (V, E)$, et un entier $K > 0$, existe-t-il deux cliques disjointes de taille $K$ dans $G$ ? On rappelle qu'une clique est un sous-ensemble de sommets tous adjacents deux à deux.

**Chemin avec paires interdites** Soient $G = (V, E)$ un graphe orienté (on distingue l'arc (u,v) de l'arc (v,u)), deux sommets de ce graphe $s, t \in V$ et une liste $C = \{(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)\}$ de paires de sommets de $G$. Existe-t-il un chemin orienté de $s$ vers $t$ dans $G$ qui contient au plus un sommet de chaque paire de la liste $C$ ?
*Indication : faire une réduction à partir de 3-SAT.*

**Vertex Cover avec degré pair** Soient $G = (V, E)$ un graphe dont tous les sommets sont de degré pair, et $k \geq 1$ un entier. Existe-t-il un ensemble de sommets de $G$ couvrant toutes les arêtes et de taille inférieure ou égale à $k$ ?

**2-Partition avec même cardinal** Soient $n = 2p$ un entier pair, et $n$ entiers strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$. Existe-t-il une partition de $\{1, 2, \dots n\}$ en deux ensembles $I$ et $I'$ de même cardinal $p$ et tels que $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I'} a_i$ ?

**Clique pour graphe régulier** Soient $G = (V, E)$ un graphe dont tous les sommets sont de même degré, et $k \geq 1$ un entier. Existe-t-il une clique de taille supérieure ou égale à $k$ ?

**Roue** Etant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un entier $K \geq 3$, déterminer si $G$ contient une roue de taille $K$, i.e. un ensemble de $K + 1$ sommets $w$, $v_1$, $v_2$, $\dots$, $v_K$ tels que $(v_i, v_{i+1}) \in E$ pour $1 \leq i < K$, $(v_K, v_1) \in E$ et $(v_i, w) \in E$ pour $1 \leq i \leq K$ ($w$ est le centre de la roue).

**Dominateur** Etant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un entier $K \geq 3$, déterminer si $G$ contient un dominateur de cardinal $K$, i.e. un sous-ensemble $D \subset V$ de cardinal $K$ tel que pour tout sommet $u \in V \setminus D$, il existe $u \in D$ avec $(u, v) \in E$

**2-Partition-Approx** Etant donnés $n$ entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$, peut-on trouver un sous-ensemble $I \subset [1..n]$ tel que $|\sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \notin I} a_i| \leq 1$

**Charpentier** Etant données $n$ baguettes rigides de longueur entières $a_1, a_2, \dots, a_n$, pouvant être reliées dans cet ordre bout-à-bout par des charnières, et étant donné un entier $k$, peut-on assembler toutes les baguettes de manière qu'en repliant la chaîne obtenue la longueur totale ne dépasse pas $k$

**Correction.**

**Chevaliers de la table ronde**

$\in$ NP : trivial.

Instance I1 de départ : (V,E) de *Circuit Hamiltonien.*

Instance I2 créée : On crée un chevalier pour chaque sommet de V. Deux chevaliers sont féroces ennemis ssi il n'y a pas d'arête de E entre les deux sommets de V desquels ils proviennent.

Equivalence : Si on a un Circuit réalisable dans I1, alors on place les chevaliers autour de la table de la façon suivante : un chevalier est voisin d'un autre ssi le sommet représentant du premier est relié au sommet représentant du second dans le circuit.

Réciproquement, si on peut réunir les chevaliers autour de la table, alors on peut faire un Circuit en prenant pour arêtes les arêtes entre les représentants des chevaliers de toutes les paires de chevaliers voisins.

**Deux cliques**

$\in$ NP : trivial.

Instance I1 de départ : (G,k) de *Clique*.

Instance I2 créée : (G $\cup_D$ G, k)

Equivalence : Si G a une clique de taille k, alors il y en a une dans G $\cup_D$ G

Réciproquement, si G $\cup_D$ G a une clique de taille k, alors elle est forcément dans l'un des deux graphes G car il n'y a aucune arête entre eux donc G a une clique de taille k.

**Chemin avec paires interdites**

$\in$ NP : trivial.

Instance I1 de départ : $C_1 \wedge ... \wedge C_m$ avec $C_k = (l_{1k} \vee l_{2k} \vee l_{3k})$ de *3-SAT*.

Instance I2 créée : (V,E,P) avec : V = $\{l_{ij} | (i,j) \in [1;3] * [1;m]\} \cup \{S,T\}$. E = {arcs entre $S$ et tous les littéraux de $C_1$, arcs entre tous les littéraux de $C_m$ et $T$, arcs entre tous les littéraux de $C_{i-1}$ et $C_i$ pour i $\in$ [2 ;m]}. P = {Toutes les paires de sommets avec des étiquettes $x_i$ et $\overline{x_i}$ pour i $\in$ [1 ;n]}.

Equivalence : S'il existe une solution à I1, on prend un chemin qui passe par un littéral valant 1 dans chaque clause. Il ne contient pas de paire interdite car $x_i$ et $\overline{x_i}$ ne peuvent prendre la même valeur en même temps.

Réciproquement, si on a un chemin ne contenant pas de paire interdite dans I2, on donne la valeur 1 à chaque litéral étiquetant les sommets du chemin, et une valeur quelconque aux autres. C'est une assignation des variables qui satisfait l'ensemble initial de clauses.

**Vertex Cover avec degré pair**

$\in$ NP : trivial.

Instance I1 de départ : (G,k) de *Vertex Cover*.

Instance I2 créée : On peut déjà remarquer qu'il y a un nombre pair de sommets de degré impair dans G car $\sum deg(v) = 2|E|$. On construit une instance (G2, k+2) en créant trois nouveaux sommets x, y et z. Ensuite on relie x à chaque sommet de G de degré impair, ainsi qu'à y et z, et on relie y et z (on a ainsi formé un triangle xyz)

Equivalence : S'il existe une couverture C dans V de cardinal plus petit que k pour G, alors il existe une couverture de cardinal plus petit que k+2 (par exemple C $\cup$ {x,y} pour G2.

Réciproquement, s'il existe une couverture C2 de cardinal plus petit que k+2 pour G2, alors C2 contient forcément au moins deux sommets dans {x,y,z} car c'est un triangle qui n'est relié au reste du graphe que grâce à x. Donc C = C2 \{x,y,z} est une couverture de G de cardinal plus petit que k.

**2-partition avec même cardinal**

$\in$ NP : trivial.

Instance I1 de départ : $a_1, ...a_n$ de *2-partition*.

Instance I2 créée : $(a_1 + 1, ...a_n + 1, 1, ...1)$ de cardinal 2n.

Equivalence : Si $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in [1,n] \setminus I} a_i$ alors $\sum_{i \in I}(a_i+1)+(n-|I|) = \sum_{i \in [1,n] \setminus I}(a_i+1)+|I|$.

Réciproquement, une solution est de la forme $\sum_{i \in I}(a_i+1)+(n-|I|) = \sum_{i \in [1,n] \setminus I}(a_i+1)+|I|$. En effet il faut avoir n termes à droite et à gauche donc il faut rajouter un $(n - |I|)$ à gauche, et $|I| \leq n$ sinon au n'aurait jamais l'égalité, car tous les $a_i$ sont positifs. Ainsi on a bien $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in [1,n] \setminus I} a_i$

**Clique pour graphe régulier**

$\in$ NP : trivial.

Instance I1 de départ : ((V,E),k) de *Clique*.

Instance I2 créée : Notons $\delta(G)$ le maximum des degrés des sommets de V. On fait $\delta(G)$ copies de G, pour chaque sommet v de V on crée $\delta(G) - deg(v)$ nouveaux sommets qu'on relie à chacune des $\delta(G)$ copies de ce sommet. On a ainsi un graphe régulier où chaque sommet à un degré égal à $\delta(G)$.

Equivalence : La construction ne crée pas de nouvelles cliques ni n'agandit des cliques existantes pour G, donc c'est évident.

**2-partition approx**

$\in$ NP : trivial.

Instance I1 de départ : $a_1, ...a_n$ de *2-partition*.

Instance I2 créée : $(1664a_1, ...1664a_n)$.

Equivalence : S'il existe I avec $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in[1,n]\setminus I} a_i$, alors $|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in[1,n]\setminus I} a_i| = 0 \leq 1$

Réciproquement, s'il existe I avec $|\sum_{i\in I} 1664a_i - \sum_{i\in[1,n]\setminus I} 1664a_i| \leq 1$, alors on a $|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in[1,n]\setminus I} a_i| \leq 1/1664$. Or on travaille dans les entiers, ainsi on aboutit à $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in[1,n]\setminus I} a_i$.

# Chapitre 9

# Algorithmes d'approximation

## 9.1 Définition

On connaît un certain nombre de problèmes NP-complets :

- 3-SAT, Clique, Vertex cover
- Subset sum $\rightarrow n$ entiers $a_1, \ldots, a_n$ et un objectif t
  existe-t-il $I$ / $\sum_{i \in I} a_i = t$

- 2-Partition $\rightarrow n$ entiers $a_1, \ldots, a_n$
  existe-t-il $I / \sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i$
- Color, Chemin Hamiltonien

En fait, la plupart d'entre eux sont des problèmes de décision associés à des problèmes d'optimisation. A défaut de calculer la solution optimale, peut-on l'approximer ?

**Définition 16.** *Un algorithme de $\lambda$-appproximation est un algorithme polynomial qui renvoie une solution approchée garantie au pire cas à un facteur $\lambda$*

**Exemple :** Pour un problème de minimisation, dire que la solution est garantie à un facteur $\lambda$ de l'optimal s'écrit :
$\forall I$ instance du problème, $ObjAlgo(I) \leq \lambda \cdot ObjOpt(I)$

## 9.2 Vertex cover

### 9.2.1 Version classique

Soit $G = (V, E)$ un graphe
On cherche une couverture des arêtes de taille minimale. Une couverture est un sous-ensemble des sommets tel que toute arête soit adjacente à l'un d'entre eux.

Glouton :
$S \leftarrow \emptyset$
tant qu'il y a des arêtes non couvertes
prendre une arête $e = (u, v)$
faire $S \leftarrow S \cup u, v$
détruire les arêtes adjacentes aux sommets $u$ et $v$

($a$) *GLOUTON-COVER* construit une couverture
($b$) *GLOUTON-COVER* s'exécute en temps polynomial

**Théorème 19.** GLOUTON-COVER *est une 2-approximation.*

**Preuve**. Soit $A$ l'ensemble des arêtes choisies par glouton.
Le cardinal de la couverture obtenue est $2 * |A|$ : $|C_{cover}| = 2|A|$ car les arêtes de $A$ n'ont pas de sommet en commun.
Or $|C_{opt}| \geq |A|$ car il faut bien couvrir ces arêtes indépendantes/
Donc $|C_{cover}| \leq 2|C_{opt}|$

□

**Remarque 7.** *Le facteur 2 peut-il être atteint ?* $\rightarrow$ *Oui pour deux sommets isolés reliés par une arete.*
*Peut-on faire* $\lambda = 1,99$ *?* $\rightarrow$ *Ouvert*
*On connaît* $\lambda = 2 - \frac{\log\log|V|}{2\log|V|}$

### 9.2.2 Version pondérée

Chaque sommet a maintenant un poids $w_i$
Problème : minimiser $\sum_{i \in I} w_i$ (pour $I$ couverture)
On pose $x_i = 1$ si $v_i$ est pris dans la couverture

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{Si } v_i \text{ est pris dans la couverture} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On veut trouver :

$$min \sum_{x_i \in \{0,1\}} x_i w_i$$

sous les contraintes

$$x_i + x_j \geq 1 \text{ pour toute arête } (i,j) \in E$$

On trouve la solution du problème linéaire sur les rationnels, i.e. on trouve $x_i^* \in [0,1]$ tels que

$$\sum_{x_i^* \in [0,1]} x_i^* w_i \quad estminimal$$

(sous les contraintes précédentes).
Ensuite on pose $x_i = 1 \Leftrightarrow x_i^* \geq \frac{1}{2}$

C'est une couverture : on a $\Leftrightarrow x_i + x_j \geq 1 \quad (\forall (i,j) \in E)$
($a$) C'est une solution (c'est une couverture)
en effet $x_i^* + x_j^* \geq 1$
Soit $x_i^* \geq \frac{1}{2}$ alors $x_i$ pris
Soit $x_j^* \geq \frac{1}{2}$ alors $x_j$ pris

($b$) C'est une 2-approximation

$$2x_i w_i \leq \sum (2x_i^*) w_i$$

## 9.3 Voyageur de commerce : TSP

### 9.3.1 Définition

**Définition :** $G = (V, E)$ graphe complet
c : $E \longmapsto \mathbf{N}$ poids sur les arêtes
borne $K > 0$
Existe-t-il une tournée (un chemin hamiltonien) de poids $\leq K$ ?

**Théorème 20.** *TSP est NP complet.*

**Preuve**.
- TSP $\in$ NP, le certificat est la liste des arêtes de la tournée.
- Complétude : réduction à partir de CHEMIN HAMILTONIEN.

Soit une instance $I_1$ de Chemin-Hamiltonien : graphe $G = (V, E)$ . Existe-t-il un chemin hamiltonien de $G$ ?
On construit une instance $I_2$ de TSP : on prend $G' = (V, E')$ complet
On définit c tel que :

$$c(e) = \begin{cases} 1 & \text{si e} \in \text{E} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On prend $K = 0$
On a bien une réduction :
- Taille polynomiale (trivial)
- Solution de $I_1 \Leftrightarrow$ Solution de $I_2$ (trivial aussi)

□

### 9.3.2 Inapproximabilité de TSP :

**Définition :** une $\lambda$ - approximation est un algorithme polynomial tel que :
$\forall I$ instance du problème, $Sol_{algo}(I) \leq \lambda \cdot Opt(I)$

**Théorème 21.** $\forall \lambda > 0$ *, il n'existe pas de* $\lambda$ *- approximation sauf si* $P = NP$*.*

**Preuve**. *Preuve par l'absurde :*
Supposons qu'il existe une $\lambda$ - approximation, je vais alors pouvoir résoudre chemin hamiltonien en temps polynomial.
Soit $G = (V, E)$ instance de chemin hamiltonien
Dans le graphe complété , on construit c tel que :

$$c(e) = \begin{cases} 1 & \text{si e} \in \text{E} \\ \lambda \cdot |V| + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On utilise ensuite l'algorithme de $\lambda$ - approximation et le coût est inférieur à $\lambda \cdot |V|$ si et seulement s'il existe un chemin hamiltonien (un chemin hamiltonien est un TSP sur les arêtes données). □

### 9.3.3 2-approximation dans le cas où c vérifie l'inégalité triangulaire

On a un graphe $G = (V, E)$ et un poids c tel que $c(u, v) \leq c(u, w) + c(w, v)$ (c vérifie l'inégalité triangulaire).

Voila un petit exemple (ici c est la distance euclidienne) :

$$\begin{array}{cccccc}
\bullet & a & \bullet & d & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & e & \bullet \\
\bullet & b & \bullet & f & \bullet & g \\
c & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & \bullet & h & \bullet & \bullet & \bullet
\end{array}$$

**Principe :**
- Construire T un arbre de poids minimum de $G$ (un algorithme glouton le fait en temps polynomial). Ici on trouve l'arbre avec les arêtes a-b, b-c, b-h, a-d, d-e, e-f et e-g.
- Doubler les arêtes de T et faire un parcours de ces arêtes (ex : w = abcbhbadefegeda)
- On ne garde que la première occurrence de chaque lettre pour obtenir une tournée (ex : abcehdefga)

**Théorème 22.** $c(\textit{Tournée}) \leq 2 \cdot c(opt)$

**Preuve**. $c(w) = 2 \cdot c(T)$
$c$(Tournée) $\leq c(w)$ à cause de l'inégalité triangulaire
$c(T) \leq c(Opt)$ car une tournée privée d'une arête est un arbre
donc $c$(Tournée) $\leq 2 \cdot c(opt)$ □

**Remarque :** L'heuristique de Lin Kernighan fournit de bons résultats.

## 9.4 Bin Packing : BP

### 9.4.1 Définition

Boites de tailles B
Objets de volume $a_1, \ldots, a_n$
But : mettre ces objets dans un nombre minimal de boites.

**Définition :** n rationnels : $a_1, \ldots, a_n$ avec $0 < a_i \leq 1$
Peut-on les partitionner en K boites $B_1, \ldots, B_K$ de capacité 1, c'est à dire tel que :

$$\sum_{j \in B_k} a_j \leq 1$$

**Théorème 23.** *Bin Packing est NP complet.*

**Preuve**.
- BP $\in$ NP (facile) certificat : liste des entiers de chaque boite
- Réduction à partir de 2-Partition

Soit une instance $I_1$ de 2P : $b_1, \ldots, b_n$
On construit une instance $I_2$ de BP : $a_i = \frac{b_i}{\frac{S}{2}}$ avec $S = \sum_{i=1}^{n} a_i$
On prend K=2.
- Taille polynomiale (trivial)
- Solution de $I_1 \Leftrightarrow$ Solution de $I_2$ (trivial aussi)

□

**Théorème 24.** *Pour tout $\epsilon > 0$ il n'existe pas de $\frac{3}{2} - \epsilon$ approximation sauf si P=NP.*

**Preuve**. On suppose qu'il existe une $\frac{3}{2} - \epsilon$ approximation pour Bin-Packing. Alors il existerait un algorithme polynomial pour résoudre 2-Partition.

On soumet à l'algorithme les $a_i$ définis précédemment ; s'il existe une 2-Partition, alors l'algorithme renvoie au plus $2(\frac{3}{2} - \epsilon) = 3 - 2\epsilon$ boîtes, donc renvoie 2 boîtes. Sinon, il renvoie au moins 3 boîtes.

On a donc un algorithme polynômial pour résoudre 2-Partition. Absurde. $\square$

### 9.4.2 Next Fit

#### Principe

- Prendre les objets dans un ordre quelconque
- Placer l'objet courant dans la dernière boîte utilisée s'il tient, sinon créer une nouvelle boîte

#### Variante : First Fit

- Prendre les objets dans un ordre quelconque
- Placer l'objet courant dans la première boîte utilisée où il tient, sinon créer une nouvelle boîte

#### Approximation

**Proposition :** Next Fit est une 2-approximation

*Preuve :*

On pose

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Par construction, la somme des contenus de toute paire de boîtes consécutives est strictement supérieure à 1. Donc si on a $K$ boîtes,

$$K - 1 < \sum_{i=1}^{K-1} contenu(B_i) + contenu(B_{i+1})$$

En outre on a

$$\sum_{i=1}^{K-1} contenu(B_i) + contenu(B_{i+1}) \leq 2A$$

Donc

$$K - 1 < 2\lceil A \rceil$$

Donc

$$K \leq 2\lceil A \rceil$$

Donc Next Fit utilise au plus $2\lceil A \rceil$ boîtes. Or l'optimal utilise au moins $\lceil A \rceil$ boîtes. Donc Next Fit est bien une 2 approximation.

**Remarque :** La borne 2 est stricte.

On considère $4n$ éléments de taille $\frac{1}{2}, \frac{1}{2n}$ ($2n$ fois). Next Fit utilise $2n$ boîtes, alors que l'optimal en utilise $n + 1$.

### 9.4.3 Dec First Fit

**Principe**

- Trier les $a_i$ par ordre décroissant
- Placer l'objet courant dans la première boîte utilisée où il tient, sinon créer une nouvelle boîte

**Approximation**

**Proposition :** $K_{DFF} \leq \frac{3}{2} K_{Opt} + 1$

*Preuve :*

On pose

$$A = \{a_i > \frac{2}{3}\} \qquad B = \{\frac{2}{3} \geq a_i > \frac{1}{2}\} \qquad C = \{\frac{1}{2} \geq a_i > \frac{1}{3}\} \qquad D = \{\frac{2}{3} \geq a_i\}$$

Dans la solution de DFF, s'il existe au moins une boîte ne contenant que des éléments de D, alors au plus une boîte (la dernière) a un taux d'occupation inférieur ou égal à $\frac{2}{3}$. En effet, si les éléments de D de la dernière boîte n'ont pu être mis dans les boîtes précédentes, c'est que celles-ci sont remplies au $\frac{2}{3}$ au moins (d'où la borne).

Sinon, la solution de DFF est la même que celle de l'instance où on enlève les éléments de D. La solution de DFF pour les éléments de A, B et C est optimale. Dans toute solution,

- les éléments de A sont tout seuls
- les éléments de B et C sont au plus 2 par boîtes et on a au plus un élément de B par boîte

Or DFF fait la meilleure répartition des C en les appariant au plus grand B ou C compatible.

**Remarque :** On peut montrer $K_{DFF} \leq \frac{11}{9} K_{Opt} + 4$.

## 9.5 2-Partition

**Définition 17.** *Soit $a_1 \dots a_n$ des entiers. Existe-il $I$ tel que $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i$ ?*

### 9.5.1 NP-complétude au sens faible et au sens fort

Quelle est la taille d'une instance I de 2-Partition ? On peut la définir par

$$n + \sum_{i=1}^{n} \lceil log a_i \rceil \qquad n + max_{i \in \{1..n\}} \lceil log a_i \rceil \qquad n \lceil log \sum_{i=1}^{n} a_i \rceil$$

**Attention :** *Résolution de 2-Partition par programmation dynamique* On définit $m(i,T)$ par : il existe un sous-ensemble $I$ des $a_1 \dots a_i$ tel que $\sum_{j \in I} a_j = T$. On a :

$$m(i,T) = m(i-1,T) \vee m(i, T - a_i)$$

On a la solution du problème en $m(n, \frac{P_{sum}}{2})$ avec $P_{sum} = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

La complexité est en $O(nS)$. On a donc un algorithme pseudo-polynômial.

Pour une instance $I$ on définit $Max(I)$ par (au choix) :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad Max_{i \in \{1 \dots n\}} a_i \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

Pour un polynôme $P$, on définit $Probleme|_P$ en restreignant $Probleme$ à ses instances $I$ telles que $Max(I) \leq P(taille(I))$

Un problème est NP-complet au sens fort si et seulement si il existe un polynôme P tel que $Probleme|_P$ reste NP-complet.

Un problème de graphes, sans nombres, est NP-complet au sens fort. Pour les problèmes avec des nombres (dont les problèmes de graphes pondérés), il faut faire attention. Ainsi 2-Partition est NP-complet au sens faible, de même que Subset-Sum, ou Knapsack : intuitivement, cela veut dire que le problème n'est difficile que si on ne borne pas la taille des données dans l'instance examinée. Un exemple de problèmes avec des nombres qui est NP-complet au sens fort est 3-Partition, dont le nom est trompeur car il ne ressemble guère à 2-Partition : étant donnés un entier $B$, $3n$ entiers $a_i$, peut-on les partitionner en $n$ triplets, chacun de somme $B$ ? On peut supposer que la somme de tous les $a_i$ vaut $nB$ (sinon il n'y a pas de solution) et qu'ils tous compris strictement entre $B/4$ et $B/2$ (pour qu'il faille exactement trois éléments pour avoir une somme égale à $B$).

### 9.5.2 Approximation gloutonnes

Le problème d'optimisation associé à 2-Partition est le suivant : soit $a_1 \dots a_n$ des entiers. Minimiser

$$\max_{I \subset \{1,2,\dots,n\}} \left( \sum_{i \in I} a_i, \sum_{i \notin I} a_i \right)$$

(bien sûr le minimum sera toujours au moins $P_{sum}/2$, où $P_{sum} = \sum_{i=1}^{n} a_i$).

On peut voir le problème précédent comme un problème d'ordonnancement à deux machines (processeurs) identiques. Il y a $n$ tâches indépendantes, qui peuvent être exécutées sur l'une des deux machines en temps $a_i$. L'objectif est de minimiser le temps total d'exécution : c'est bien le problème précédent. Il y a deux variantes naturelles si on veut le résoudre avec un algorithme glouton :

- GLOUTON : prendre les tâches dans n'importe quel ordre. Les allouer au processeur le moins chargé.
- GLOUTON-TRI : le même que précédemment, mais après avoir trié les tâches par poids décroissant.

L'idée de trier est que l'arrivée d'une grosse tâche à la fin risque de déséquilibrer toute l'exécution. Par contre, il faut connaître toutes les tâches avant de commencer l'ordonnancement (algorithme off-line). Le glouton sans tri peut s'appliquer à un problème on-line, où les tâches arrivent dynamiquement (comme des jobs d'utilisateurs à exécuter sur un serveur bi-pro).

**Théorème 25.** *GLOUTON est une* $4/3$ *approximation, GLOUTON-TRI est une* $7/6$ *approximation, et ces facteurs d'approximation ne peuvent pas être améliorés.*

**Preuve**. On montre d'abord que les bornes sont strictes. Pour GLOUTON, prendre trois tâches de poids 1, 1, et 2, GLOUTON ordonnance en temps 3 alors que l'optimal est 2. Pour GLOUTON-TRI, prendre cinq tâches, trois de poids 2 et deux de poids 3. GLOUTON-TRI ordonnance en temps 7, alors que l'optimal est 6.

Pour l'approximation, soit $P_{sum} = \sum_{i=1}^{n} a_i$. En termes d'ordonnancement, $P_{sum}$ est le temps séquentiel. Soit $Opt$ le temps optimal avec deux machines, alors $Opt \geq P_{sum}/2$. Notons aussi que $a_i \leq Opt$ pour toute tâche $a_i$.

Commençons par GLOUTON. Soient $P_1$ et $P_2$ les deux processeurs. Disons que $P_1$ termine l'exécution, et soit $a_j$ la dernière tâche exécutée sur cette machine. Soit $M_1$ le temps d'exécution sur $P_1$ (la somme des tâches qui lui sont allouées), et $M_2$ le temps d'exécution sur $P_2$. Comme $P_1$ termine, $M_1 \geq M_2$. Bien sûr $M_1 + M_2 = P_{sum}$.

On a supposé que $a_j$ est la dernière tâche de $P_1$. Soit $M_0 = M_1 - a_j$ la charge de $P_1$ avant que GLOUTON ne lui alloue la tâche $a_j$. Pourquoi GLOUTON choisit-il $P_1$ ? Parce qu'à ce moment, $P_2$ est plus chargé que $P_1$ : $M_0$ est inférieur ou égal à la charge de $P_2$ à ce moment, elle-même inférieure à sa charge finale $M_2$ (noter qu'on a pu rajouter des tâches à $P_2$ après avoir ordonnancé $a_j$) : donc $M_0 \leq M_2$. Pour résumer, le temps de GLOUTON est $M_1$, avec

$$M_1 = M_0 + a_j = 1/2((M_0 + M_0 + a_j) + a_j) \leq 1/2((M_0 + M_2 + a_j) + a_j) = 1/2(P_{sum} + a_j)$$

$$M_1 \leq Opt + a_j/2 \leq Opt + Opt/2,$$

d'où la 3/2-approximation pour GLOUTON.

Pour GLOUTON-TRI on reprend la preuve précédente mais on va être plus précis que la majoration $a_j \leq Opt$. D'abord, si $a_j \leq Opt/3$, on obtient juste ce qu'il faut, $M_1 \leq 7/6Opt$. Mais si $a_j > Opt/3$, alors $j \leq 4$ : en effet, si $a_j$ était la cinquième tâche, comme les tâches sont triées il y aurait au moins 5 taches de poids supérieur à $Opt/3$, et dans tout ordonnancement, y compris l'optimal, l'une des machines aurait la charge de trois d'entre elles, contradiction. On remarque alors que le temps de GLOUTON-TRI est le même pour ordonnancer toutes les tâches que pour ordonnancer les $j \leq 4$ premières. Mais pour tout ensemble d'au plus quatre tâches, GLOUTON-TRI est optimal, et $M_1 = Opt$. □

### 9.5.3 Une $(1+\epsilon)$-approximation

On va montrer que 2-Partition admet un schéma d'approximation polynomial PTAS, pour *Polynomial Time Approximation Scheme* : pour toute constante $\lambda = 1 + \varepsilon > 1$, il existe une $\lambda$-approximation, i.e. un algorithme dont la performance est garantie à un facteur $\lambda$, et dont le temps d'exécution est polynomial. Attention : polynomial en la taille de l'instance de 2-Partition, mais pas forcément en $1/\varepsilon$, c'est là toute la subtilité. On verra plus loin un FPTAS, pour *Fully Polynomial Time Approximation Scheme*, où le temps est polynomial à la fois en la taille de l'instance et en $1/\varepsilon$.

**Théorème 26.** *$\forall \varepsilon > 0$, 2-Partition admet une $(1+\epsilon)$-approximation.*

**Preuve**. On pose :

$$P_{sum} = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$P_{max} = \max a_i$$

$$L = \max(\frac{1}{2}P_{sum}, P_{max})$$

On a déjà vu plus haut que :

**Lemme 10.** *$L \leq Opt$.*

Soit I une instance de 2-partition : $a_1, ..., a_n$. et $\epsilon > 0$. On appelle big jobs, les $a_i$ tels que : $a_i > \epsilon L$ et small jobs ceux tels que : $a_i \leq \epsilon L$. Considérons l'instance $I^*$ qui regroupe uniquement les big jobs et $\lfloor \frac{S}{\epsilon L} \rfloor$ jobs de taille $\epsilon L$, où $S = \sum_{a_i \text{ small job}} a_i$.

**Lemme 11.** *$Opt^* \leq (1+\epsilon)Opt$ (inégalité (A)), où Opt est un ordonnancement optimal pour I et $Opt^*$ un ordonnancement optimal pour $I^*$.*

**Preuve**. Considérons un ordonnancement optimal $Opt$ pour l'instance de départ $I$. Soient $S_1$ la somme des small jobs sur la machine $P_1$ et $S_2$ celle des small jobs sur la machine $P_2$.

$P_1$ : ——— oo ——- ooo ——-

$P_2$ : —— oo ———- o ——

où o est un small job et —— un big job.

Sur chaque machine $P_i$, on laisse les gros jobs où ils sont, et on remplace les petits jobs par $\left\lceil \frac{S_i}{\epsilon L} \right\rceil$ jobs de taille $\epsilon L$. On a symboliquement :

$P_i$ : ——- —— ——- oooo oooo oo

Comme

$$\left\lceil \frac{S_1}{\epsilon * L} \right\rceil + \left\lceil \frac{S_2}{\epsilon * L} \right\rceil \geq \left\lfloor \frac{S_1 + S_2}{\epsilon * L} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{S}{\epsilon * L} \right\rfloor$$

on a ordonnancé au moins autant de jobs de taille $\epsilon L$ qu'il y en a dans $I^*$. En faisant ainsi, on a augmenté le temps de $P_i$ d'au plus :

$$\left\lceil \frac{S_i}{\epsilon L} \right\rceil \cdot \epsilon L \; - \; S_i \leq \epsilon L$$

Le temps d'exécution est au moins égal à l'optimal pour $I^*$, donc :

$$Opt^* \leq Opt + \epsilon L \leq Opt + \epsilon . Opt$$

□

**Comment ordonnancer $I^*$ ?** Combien y a-t-il de jobs dans $I^*$ ? Quand on a remplacé les petits jobs de $I$ par des jobs de taille $\epsilon L$, on n'a pas augmenté le temps d'exécution total, qui est borné par $P_{sum} \leq 2L$. Chaque job de $I^*$ a une durée au moins $\epsilon L$, donc il y en a au plus $\frac{2L}{\epsilon L} = \frac{2}{\epsilon}$, c'est une constante. Au passage, la taille de $I^*$, constante donc, est bien polynomiale en la taille de l'instance de départ $I$. Pour odonnancer $I^*$, il suffit d'essayer toutes les $2^{\frac{2}{\epsilon}}$ possibilités d'ordonnancement et de garder la meilleure. Bien sûr ceci a un coût non polynomial en $1/\epsilon$, mais c'est une constante en la taille de l'instance de départ.

**Retour à l'instance de départ I** On a désormais l'ordonnancement optimal $\sigma^*$ pour $I^*$. Soit $L_i^*$ la charge de la machine $P_i$ avec $\sigma^*$, qu'on décompose en $L_i^* = B_i^* + S_i^*$, où $B_i^*$ sont les big jobs et $S_i^*$ les small jobs. Par construction de $I^*$, on a l'inégalité (B) :

$$S_1^* + S_2^* = \epsilon L \left\lfloor \frac{S}{\epsilon L} \right\rfloor > S - \epsilon L$$

On peut alors considérer l'ordonnancement $\sigma$ pour $I$ où les big jobs sont inchangés et où on fait un glouton avec les small jobs : on les alloue d'abord à $P_1$ dans l'espace $S_1^* + 2 * \epsilon * L$, puis quand il n'y a plus de place, on les alloue sur $P_2$ dans l'espace $S_2^*$ :

**Lemme 12.** *En procédant ainsi, on case tous les small jobs.*

**Preuve**. En effet, on case au moins une quantité $S_1^* + \epsilon L$ de small jobs sur $P_1$ : chacun d'entre eux prenant moins de $\epsilon L$, il faut qu'il reste moins de $\epsilon L$ place dans l'intervalle alloué sur $P_1$ pour qu'on soit obligé de passer à $P_2$. Mais alors il reste au plus $S - (S_1^* + \epsilon L) \leq S_2^*$ (d'après l'inégalité (B)) à allouer à $P_2$, donc on a bien la place.

Au final, on a construit $\sigma$ ordonnancement pour $I$ en temps polynomial. Son temps d'exécution excède celui de l'ordonnancement optimal pour $I^*$ d'au plus $2\epsilon L$, donc

$$Opt \leq ordo(\sigma) \leq Opt^* + 2\epsilon L \leq (1 + 3\epsilon).Opt,$$

la dernière inégalité venant de (A). □

Ceci conclut la preuve du théorème. □

**Remarque 8.** *On peut proposer une preuve plus simple en utilisant la technique des big jobs et celle du GLOUTON du paragraphe précédent pour les petits jobs. On ne considère que les bigs jobs et tous leurs ordonnancements possible. Ils sont en nombre constant, on garde le meilleur. Le temps de cet ordonnancement* $Opt^{big}$ *est inférieur à Opt, l'ordonnancement optimal pour l'instance de départ I. On ordonnance alors les small jobs sur les deux machines en GLOUTON, à la suite des big jobs. Soit le temps total de l'ordonnancement ne change pas, i.e. reste égal à* $Opt^{big}$*, et alors il est optimal. Soit la machine qui termine termine avec un small job* $a_j$*. Mais alors sa charge avant cette dernière allocation ne pouvait pas dépasser* $1/2P_{sum}$*, sinon on aurait attribué* $a_j$ *à l'autre machine (même idée et preuve que pour GLOUTON). Et donc le temps est au plus* $1/2P_{sum} + a_j \leq L + \epsilon L \leq (1+\epsilon)Opt$*.*

### 9.5.4 FPTAS pour 2-Partition

On va maintenant montrer que 2-Partition admet même un FPTAS (*Fully Polynomial Time Approximation Scheme*), soit que pour toute instance $I$ de 2-Partition et tout $\varepsilon > 0$, il existe une $(1+\varepsilon)$-approximation qui soit polynomiale à la fois en la taille de $I$ *et en* $1/\varepsilon$.

La relation entre PTAS et FPTAS est la même qu'entre continuité et uniforme continuité : on fait changer le $\forall\varepsilon$ de côté. Et bien entendu, admettre un FPTAS étant une propriété plus forte, (FPTAS $\Rightarrow$ PTAS).

**Théorème 27.** $\forall\varepsilon > 0$*, 2-Partition admet une* $(1+\varepsilon)$*-approximation polynômiale en* $(1/\varepsilon)$

**Preuve**. On va coder les différents ordonnancements sous formes de *Vector Sets* où le premier (resp. deuxième) élément de chaque vecteur représente le temps de travail de la première (resp. deuxième) machine :

$$\begin{cases} VS_1 = \{[a_1, 0], [0, a_1]\} \\ VS_{k-1} \to VS_k : \forall [x,y] \in VS_{k-1}, [x + a_k, y] \text{ et } [x, y + a_k] \in VS_k \end{cases}$$

**Entrée** : les tâches $a_1 \ldots a_n$.

**Sortie** : le vecteur $[x,y] \in VS_n$ qui minimise $\max(x,y)$.

**Idée** : on va énumérer tous les ordonnancements possibles, mais en "élaguant" au passage les branches qui ne nous intéressent pas.

Soit $\Delta = 1 + \frac{\varepsilon}{2n}$.
On effectue un quadrillage du plan selon les puissances de $\Delta$, entre 0 et $\Delta^M$.

$$M = \lceil \log_\Delta P_{sum} \rceil = \left\lceil \frac{\log P_{sum}}{\log \Delta} \right\rceil \leq \left\lceil \left(1 + \frac{2n}{\varepsilon}\right) \ln(P_{sum}) \right\rceil$$

En effet, si $z \geq 1, \ln(z) \geq 1 - \frac{1}{z}$.

L'idée est de ne rajouter les vecteurs que s'ils tombent dans une case vide.

Comme $M$ est polynômial en $\frac{1}{\varepsilon}$ et en $\ln(P_{sum})$ et que $taille(I) \geq \ln(P_{sum})$, il suffit de démontrer que notre algorithme est bien une $(1+\varepsilon)$-approximation.

Deux vecteurs $[x_1, y_1]$ et $[x_2, y_2]$ tombent dans la même case ssi

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{\Delta} \leq x_2 \leq \Delta x_1 \\ \\ \dfrac{y_1}{\Delta} \leq y_2 \leq \Delta y_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} VS_1^{\#} = VS_1 \\ VS_{k-1}^{\#} \to VS_k^{\#} \end{cases} \quad :$$

$\forall [x, y] \in VS_{k-1}^{\#}, [x + a_k, y] \in VS_k^{\#}$ sauf si un vecteur de $VS_k^{\#}$ est déjà dans la même case. De même pour $[x, y + a_k]$.

On ne garde donc qu'au plus un vecteur par case à chaque étape, ce qui donne une complexité en $n \times M^2$, soit polynômiale en $taille(I)$.

**Lemme 13.** $\forall [x, y] \in VS_k, \exists [x^{\#}, y^{\#}] \in VS_k^{\#}$ *tel que* $x^{\#} \leq \Delta^k x$ *et* $y^{\#} \leq \Delta^k y$

**Preuve**. **Par récurrence**

**k = 1** : trivial

**k - 1 → k** : Soit $[x, y] \in VS_k$,

$$\begin{cases} x = u + a_k \text{ et } y = v \\ \text{ou} & \qquad \text{où } [u, v] \in VS_{k-1} \\ x = u \text{ et } y = v + a_k \end{cases}$$

Par hypothèse de récurrence, $\exists [u^{\#}, v^{\#}] \in VS_{k-1}^{\#}$ où $u^{\#} \leq \Delta^{k-1} u$ et $v^{\#} \leq \Delta^{k-1} v$

$[u^{\#} + a_k, v]$ n'est pas nécessairement dans $VS_k^{\#}$ mais on sait qu'il y a au moins un élément de la même case dans $VS_k^{\#}$ :

$$\exists [x^{\#}, y^{\#}] \in VS_k^{\#} \text{ tel que } x^{\#} \leq \Delta \left( u^{\#} + a_k \right) \text{ et } y^{\#} \leq \Delta v^{\#}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^{\#} \leq \Delta^k u + \Delta a_k \leq \Delta^k (u + a_k) = \Delta^k x \\ y^{\#} \leq \Delta v^{\#} \leq \Delta^k y \end{cases}$$

et symétriquement pour $[u, y + a_k]$. □

On en déduit donc $max(x^{\#}, y^{\#}) \leq \Delta^n max(x, y)$.

Reste à montrer $\Delta^n \leq (1 + \varepsilon)$ :

$$\Delta^n = \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2n} \right)^n$$

**Lemme 14.** *Pour* $0 \leq z \leq 1$, $f(z) = \left( 1 + \dfrac{z}{n} \right)^n - 1 - 2z \leq 0$

**Preuve**. $f'(z) = \dfrac{1}{n} n \left( 1 + \dfrac{z}{n} \right)^{n-1} - 2$.

On en déduit que $f$ est convexe et atteint son minimum en $\lambda_0 = n \left( \sqrt[n-1]{2} - 1 \right)$. Or $f(0) = -1$ et $f(1) = g(n) = \left( 1 + \dfrac{1}{n} \right)^n - 3$. On compare une fonction linéaire à une fonction convexe : si la relation est vraie aux bornes, elle est vraie partout. □

Ceci conclut la démonstration.

□

## 9.6 Exercices

**Exercice 9.6.1.** *Approximabilité de SUBSET-SUM*

Dans un précédent TD, on s'est intéressé au problème de décision SUBSET-SUM consistant à savoir s'il existe un sous-ensemble d'entiers de $S$ dont la somme vaut exactement $t$. Le problème d'optimisation qui lui est associé prend aussi en entrée un ensemble d'entiers strictement positifs $S$ et un entier $t$ et il consiste à trouver un sous-ensemble de $S$ dont la somme est la plus grande possible sans dépasser $t$ (cette somme qui doit donc approcher le plus possible $t$ sera appelée *somme optimale*).

On suppose que $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et que les ensembles sont manipulés sous forme de listes triées par ordre croissant. Pour une liste d'entiers $L$ et un entier $x$, on note $L+x$ la liste d'entiers obtenue en ajoutant $x$ à chaque entier de $L$. Pour listes $L$ et $L'$, on note **Fusion**$(L, L')$ la liste contenant l'union des éléments des deux listes.

1 - *Premier algorithme*

**Algorithm:Somme**$(S, t)$

---

**début**
- $n \leftarrow |S|$ ;
- $L_0 \leftarrow \{0\}$ ;
- **pour** $i$ **de** *1* **à** $n$ **faire**
  - $L_i \leftarrow$ **Fusion**$(L_{i-1}, L_{i-1} + x_i)$ ;
  - Supprimer de $L_i$ tout élément supérieur à $t$ ;
- **retourner** le plus grand élément de $L_n$

**fin**

Quel est la distance entre la valeur retournée par cet algorithme et la somme optimale ? Quelle est la complexité de cet algorithme dans le cas général ? Et si pour un entier $k \geq 1$ fixé, on ne considère que les entrées telles que $t = \mathcal{O}(|S|^k)$, quelle est la complexité de cet algorithme ?

2 - *Deuxième algorithme*

Cet algorithme prend en entrée un paramètre $\epsilon$ en plus, où $\epsilon$ est un réel vérifiant $0 < \epsilon < 1$.

**Algorithm:Somme-avec-seuillage**$(S, t)$

---

**début**
- $n \leftarrow |S|$ ;
- $L_0 \leftarrow \{0\}$ ;
- **pour** $i$ **de** *1* **à** $n$ **faire**
  - $L_i \leftarrow$ **Fusion**$(L_{i-1}, L_{i-1} + x_i)$ ;
  - $L_i \leftarrow$ **Seuiller**$(L_i, \epsilon/2n)$ ;
  - Supprimer de $L_i$ tout élément supérieur à $t$ ;
- **retourner** le plus grand élément de $L_n$

**fin**

L'opération **Seuiller** décrite ci-dessous réduit une liste $L =< y_0, y_1, \ldots, y_m >$ (supposée triée par ordre croissant) avec le seuil $\delta$ :

**Algorithm:Seuiller**$(L, \delta)$

---

**début**
  $m \leftarrow |L|$ ;
  $L' \leftarrow< y_0 >$ ;
  *dernier* $\leftarrow y_0$ ;
  **pour** $i$ **de** *1* **à** $m$ **faire**
    **si** $y_i > (1+\delta)$*dernier* **alors**
      Insérer $y_i$ à la fin de $L'$ ;
      *dernier* $\leftarrow y_i$ ;
  **retourner** $L'$
**fin**

Evaluer le nombre d'éléments dans $L_i$ à la fin de la boucle. En déduire la complexité totale de l'algorithme. Pour donner la qualité de l'approximation fournie par cet algorithme, borner le ratio valeur retournée/somme optimale.

**Correction.**

On a un ensemble S = $\{x_1, \ldots, x_n\}$ d'entiers strictement positifs ainsi qu'un entier t . On cherche une somme partielle d'éléments de S maximale et inférieure à t. On appellera somme optimale ce nombre.

1 - Premier Algorithme

Dans le premier algorithme , $L_i$ représente l'ensemble des sommes partielles des éléments de $\{x_1, \ldots, x_i\}$ inférieures à t. $L_n$ représente donc l'ensemble des sommes partielles de S inférieures à t. Par conséquent, $\max(L_n)$ renvoie exactement la somme optimale de S. De plus, cet algorithme a testé toutes les sommes partielles inférieures à t.

On en déduit donc que :

- La différence entre le résultat trouvé et la somme optimale est 0
- Dans le pire des cas, on teste toutes les sommes partielles de S soit une complexité de O( $2^n$)
- Si t = O( $|S|^k$) pour k un entier fixé, alors $|L_i|$ = O( $|S|^k$). Au pas i de la boucle, la fusion et la suppression se font en $O(|L_i|)$. Comme il y a n pas dans la boucle, la complexité totale est O( $|S|^{k+1}$)

2 - Deuxième Algorithme

Considérons une liste l = $\{y_0, \ldots, y_m\}$ d'entiers triés par ordre croissant et $\delta > 0$. L'opération de seuillage va consister à dire : soit y' le dernier élément gardé de l (on garde $y_0$ au départ) si $y_i > y' * (1+\delta)$ alors on va garder $y_i$. En gros, on enlève des éléments qui sont trop proches d'autres proches d'autres éléments.

L'algorithme proposé va fonctionner de la même façon que le précédent sauf qu'il va seuiller à chaque pas de la boucle $L_i$ par rapport à $\epsilon/2n$. On a alors $L_n = \{y_0, \ldots, y_m\}$. On va essayer de majorer m. On sait que :

$t \geq y_m \geq (1+\epsilon/2n)^{m-1} * y_0 \geq (1+\epsilon/2n)^{m-1}$

D'où : $m \leq \ln t / \ln(1+\epsilon/2n) \leq (\ln t * 2n)/(\ln 2 * \epsilon) + 1$

m est donc polynomial en ln t et en $1/\epsilon$ $\ln t$ polynomial en la taille des données l'algorithme est en O(m * n) donc polynomial en la taille des données.

Il faut maintenant vérifier qu'on a bien trouvé une $(1+\epsilon)$ Approximation en montrant que :

$maxL_n \geq (1+\epsilon) * Opt$(somme optimale)

On note $P_i$ l'ensemble des sommes partielles de $\{x_1, \ldots, x_i\}$ inférieures à t.
Invariant : $\forall x \in P_i, \exists y \in L_i,\ x/(1+\delta)^i \leq y \leq x$
Par récurrence :
- i = 0 : OK
- On suppose que c'est vrai pour (i-1) et on le montre pour i :
Soit $x \in P_i$
$P_i = P_{i-1} \cup (P_{i-1} + x_i)$
$x = x' + e$ avec $x' \in P_{i-1},\ e = 0 \ ou \ e = x_i$
$x' \in P_{i-1}$ donc $\exists y',\ x'/(1+\delta)^i \leq y' \leq x'$
Si y' + e est conservé par le seuillage :
$(x'+e)/(1+\delta)^i \leq x'/(1+\delta)^{i-1} + e \leq y' + e \leq x' + e = x$
Si y' + e n'est pas conservé par le seuillage :
$\exists y'' \in L_i,\ y'' \leq y' + x_i \leq y'' * (1+\delta)$
$(y'+e)/(1+\delta) \leq y'' \leq y' + e \leq x' + e \leq x$
$(x'/(1+\delta)^{i-1} + e)/(1+\delta) \leq y''$
$(x'+e)/(1+\delta)^i \leq y''$
C'est l'encadrement recherché.
Grâce à l'invariant, on obtient : $Algo \geq Opt/(1+\epsilon/2n)^n \geq Opt(1+\epsilon)$

*On a donc une* $1+\epsilon$ *approximation de* $Subset_sum$ *polynomial en la taille des donnees et polynomial en* $1/\epsilon$

# Chapitre 10

# Références

Nous avons utilisé principalement deux livres pour ce cours :

**Introduction to Algorithms** de T. H. Cormen, C. E. Leiserson et R. L. Rivest, The MIT Press (1990). L'ouvrage de référence par excellence, à acheter et conserver toute sa vie d'informaticien.

**Computers and Intractability, a Guide to the Theory of NP-Completeness** de M. R. Garey et D. S. Johnson, Freeman (1991). Essentiellement pour son introduction à la NP-complétude au sens fort, et quelques jolies réductions. On revient toujours à son catalogue de problèmes NP-complets.

Citons quelques source ponctuelles :

- *The art of Computer Programming*, les trois tomes de Knuth, pour ses exercices incroyables
- *Types de données et algorithmes*, le livre de Froidevaux, Gaudel et Soria (Mc Graw-Hill 1990), pour l'analyse fine des problèmes de tri
- le NP-compendium, maintenu sur le Web (`http://www.nada.kth.se/~viggo/problemlist/compendium.html`), pour les résultats d'approximation. Le livre qui correspond, *Complexity and Approximation*, de Ausiello, Crescenzi et al. (Springer 1999) est vraiment très complet, avec une bonne introduction aux schémas d'approximation.

Enfin, deux livres plus difficiles, à réserver aux plus aventureux : celui de Kozen, *The design and analysis of algorithms* (Springer 1991), contient les notes de cours et exercices d'un cours de niveau avancé donné à Cornell, et celui de Vazirani, *Approximation algorithms* (Springer 2001).