Correction TD 10 - De la NP-complétude

Chevaliers de la table ronde

$\in$ NP : trivial.

Instance I1 de départ : (V,E) de *Circuit Hamiltonien.*

Instance I2 créée : On crée un chevalier pour chaque sommet de V. Deux chevaliers sont féroces ennemis ssi il n'y a pas d'arête de E entre les deux sommets de V desquels ils proviennent.

Equivalence : Si on a un Circuit réalisable dans I1, alors on place les chevaliers autour de la table de la façon suivante : un chevalier est voisin d'un autre ssi le sommet représentant du premier est relié au sommet représentant du second dans le circuit.

Réciproquement, si on peut réunir les chevaliers autour de la table, alors on peut faire un Circuit en prenant pour arêtes les arêtes entre les représentants des chevaliers de toutes les paires de chevaliers voisins.

Deux cliques

$\in$ NP : trivial.

Instance I1 de départ : (G,k) de *Clique.*

Instance I2 créée : (G $\cup_D$ G, k)

Equivalence : Si G a une clique de taille k, alors il y en a une dans G $\cup_D$ G

Réciproquement, si G $\cup_D$ G a une clique de taille k, alors elle est forcément dans l'un des deux graphes G car il n'y a aucune arête entre eux donc G a une clique de taille k.

Chemin avec paires interdites

$\in$ NP : trivial.

Instance I1 de départ : $C_1 \wedge ... \wedge C_m$ avec $C_k = (l_{1k} \vee l_{2k} \vee l_{3k})$ de *3-SAT*.

Instance I2 créée : (V,E,P) avec : V = $\{l_{ij} | (i,j) \in [1;3]*[1;m]\} \cup \{S,T\}$. E = {arcs entre S et tous les littéraux de C_1, arcs entre tous les littéraux de C_m et T, arcs entre tous les littéraux de C_{i-1} et C_i pour i $\in$ [2 ;m]}. P = {Toutes les paires de sommets avec des étiquettes x_i et $\overline{x_i}$ pour i $\in$ [1 ;n]}.

Equivalence : S'il existe une solution à I1, on prend un chemin qui passe par un littéral valant 1 dans chaque clause. Il ne contient pas de paire interdite car x_i et $\overline{x_i}$ ne peuvent prendre la même valeur en même temps.

Réciproquement, si on a un chemin ne contenant pas de paire interdite dans I2, on donne la valeur 1 à chaque litéral étiquetant les sommets du chemin, et une valeur quelconque aux autres. C'est une assignation des variables qui satisfait l'ensemble initial de clauses.

Vertex Cover avec degré pair

$\in$ NP : trivial.

Instance I1 de départ : (G,k) de *Vertex Cover.*

Instance I2 créée : On peut déjà remarquer qu'il y a un nombre pair de sommets de degré impair dans G car $\sum deg(v) = 2|E|$. On construit une instance (G2, k+2) en créant trois nouveaux sommets x, y et z. Ensuite on relie x à chaque sommet de G de degré impair, ainsi qu'à y et z, et on relie y et z (on a ainsi formé un triangle xyz)

Equivalence : S'il existe une couverture C dans V de cardinal plus petit que k pour G, alors il existe une couverture de cardinal plus petit que k+2 (par exemple C $\cup$ {x,y} pour G2.

Réciproquement, s'il existe une couverture C2 de cardinal plus petit que k+2 pour G2, alors C2 contient forcément au moins deux sommets dans {x,y,z} car c'est un triangle qui n'est relié au reste du graphe que grâce à x. Donc C = C2 \{x,y,z} est une couverture de G de cardinal plus petit que k.

2-partition avec même cardinal

$\in$ NP : trivial.

Instance I1 de départ : $a_1, ...a_n$ de *2-partition*.

Instance I2 créée : $(a_1 + 1, ...a_n + 1, 1, ...1)$ de cardinal 2n.

Equivalence : Si $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in[1,n]\setminus I} a_i$ alors $\sum_{i\in I}(a_i + 1) + (n - |I|) = \sum_{i\in[1,n]\setminus I}(a_i + 1) + |I|$.

Réciproquement, une solution est de la forme $\sum_{i\in I}(a_i + 1) + (n - |I|) = \sum_{i\in[1,n]\setminus I}(a_i + 1) + |I|$. En effet il faut avoir n termes à droite et à gauche donc il faut rajouter un $(n - |I|)$ à gauche, et $|I| \leq n$ sinon au n'aurait jamais l'égalité, car tous les a_i sont positifs. Ainsi on a bien $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in[1,n]\setminus I} a_i$

Clique pour graphe régulier

$\in$ NP : trivial.

Instance I1 de départ : ((V,E),k) de *Clique*.

Instance I2 créée : Notons $\delta(G)$ le maximum des degrés des sommets de V. On fait $\delta(G)$ copies de G, pour chaque sommet v de V on crée $\delta(G) - deg(v)$ nouveaux sommets qu'on relie à chacune des $\delta(G)$ copies de ce sommet. On a ainsi un graphe régulier où chaque sommet à un degré égal à $\delta(G)$.

Equivalence : La construction ne crée pas de nouvelles cliques ni n'agandit des cliques existantes pour G, donc c'est évident.

2-partition approx

$\in$ NP : trivial.

Instance I1 de départ : $a_1, ...a_n$ de *2-partition*.

Instance I2 créée : $(1664a_1, ...1664a_n)$.

Equivalence : S'il existe I avec $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in[1,n]\setminus I} a_i$, alors $|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in[1,n]\setminus I} a_i| = 0 \leq 1$

Réciproquement, s'il existe I avec $|\sum_{i\in I} 1664a_i - \sum_{i\in[1,n]\setminus I} 1664a_i| \leq 1$, alors on a $|\sum_{i\in I} a_i - \sum_{i\in[1,n]\setminus I} a_i| \leq 1/1664$. Or on travaille dans les entiers, ainsi on aboutit à $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in[1,n]\setminus I} a_i$.