Correction TD 2

4 janvier 2005

Exercice 1

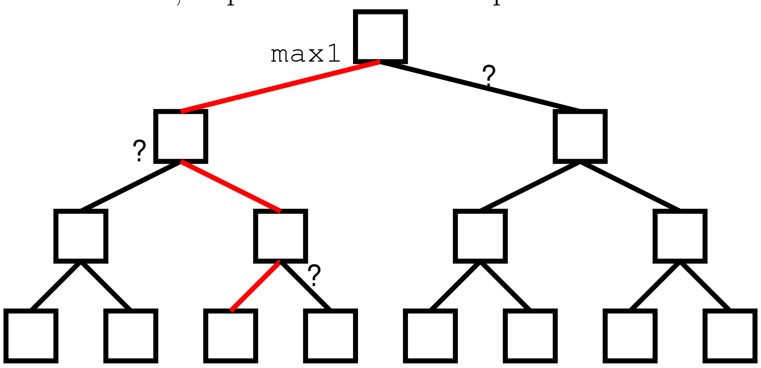
1 – Algorithme naïf : recherche du premier maximum, puis du second.

$max_1 \leftarrow T[1]$;
pour i **allant de** 2 **à** n **faire**
  si $T[i] > max_1$ **alors**
    $max_1 \leftarrow T[i]$;
    $posmax_1 \leftarrow i$;
si $posmax_1 \neq 1$ **alors** $max_2 \leftarrow T[1]$ **sinon** $max_2 \leftarrow T[2]$;
pour i **allant de** 2 **à** n **avec** $i \neq posmax_1$ **faire**
  si $T[i] > max_2$ **alors**
    $max_2 \leftarrow T[i]$;
retourner max_1, max_2;

Nombre de comparaisons :

Premier maximum, sur n valeurs :	$n-1$
Second maximum, sur n - 1 valeurs :	$n-2$
	$2n-3$

2 – Cas où $n = 2^k$:
On calcule le premier maximum à la façon d'un tournoi de tennis. On cherche ensuite le second maximum, en prenant le maximum parmi les adversaires que le premier à rencontré.



Nombre de comparaisons :

Premier maximum :	$n-1 = 2^k - 1$
Second maximum :	$k-1$
	$2^k + k - 2 = n + log_2 n - 2$

Cas général : n quelconque
S'il n'est pas rempli et a une profondeur minimale, la branche de longueur maximale est de longueur $\lceil log_2 n \rceil$.

Au pire, nombre de comparaisons :

Premier maximum :	$n-1$
Second maximum :	$\lceil log_2 n \rceil - 1$
	$n + \lceil log_2 n \rceil - 2$

3.1 – Pour chercher le maximum parmis N valeurs, on doit effectuer $N-1$ comparaisons. On a donc 2^{N-1} feuilles dans l'arbre de décision.

3.2 – Par récurrence sur la hauteur h de l'arbre

- Pour $h = 0$: 1 feuille au plus
- On considère un arbre de hauteur $h+1$, on a alors deux cas, soit la racine a un seul fils soit il en a deux.
  - un fils : on alors le nombre de feuille qui correspond à celui de l'arbre partant du fils, qui est de hauteur h , et $2^(h+1) \geq 2^h$ ce qui va bien.
  - deux fils : on a alors le nombre de feuilles qui correspond à la somme de celles des deux sous arbresz partants des deux fils : $f = f_1 + f_2$, en ayant pour chacun une hauteur maximale de h soit : $2^(h+1) \geq 2^h + 2^h \geq 2^{h_1} + 2^{h_2} \geq f_1 + f_2 \geq f$ cqfd.

3.3 – On partitionne les feuilles de A selon la valeur du premier maximum pour former les A_i ; A_i est au final l'arbre A dont on a enlevé tous ce qui n'aboutissait pas à une feuille concluant que le premier maximum était i. Ces A_i sont des arbres donnant un maximum parmi n-1 éléments donc ils ont chacun un nombre de feuilles tel que : nombre de feuilles de $A_i \geq 2^{n-2}$ Donc en considérant A comme la 'fusion' de ces arbres qui en forme une partition, on a :

$$\begin{aligned}
nombredefeuillesdeA &\geq \sum_{i=1}^{n} 2^{n-2} \\
&\geq n2^{n-2} \\
2^{hauteur} &\geq n2^{n-2} \\
hauteur &\geq \lceil \log_2(n2^{n-2}) \rceil \\
&\geq n - 2 + \lceil \log_2 n \rceil
\end{aligned}$$

Exercice 2

1 – Par linéarité, la somme de deux Tœplitz reste une Tœplitz. Ce n'est pas vrai pour le produit. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2 – On n'additionne que les premières lignes et les premières colonnes, ce qui fait $2n-1$ opérations.

3 – On ne considère que les matrices de taille $2^k \times 2^k$.

On décompose la matrice en blocs de taille $n = 2^{k-1}$

$$\mathbf{M} \times \mathbf{T} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
U &= (C+A)X \\
V &= A(Y-X) \\
W &= (B+A)Y
\end{aligned}$$

et on calcule :

$$\mathbf{M} \times \mathbf{T} = \begin{pmatrix} W - V \\ U - V \end{pmatrix}$$

Calcul de la complexité : On note respectivement $M(n)$ et $A(n)$ le nombre de multiplications et d'additions pour un produit de matrices $n \times n$.

$$\begin{array}{rcl} M(2^k) & = & 3M(2^{k-1}) \\ M(1) & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} A(2^k) & = & 3A(2^{k-1}) + 2(2^k - 1) + 2^{k-1} + 2^k \\ A(1) & = & 0 \end{array}$$

On résoud les récurrences :
on pose $M_s = M(2^s)$, et on pose $A_s = A(2^s)$.

le calcul pour les multiplications :

$$\begin{cases} M_s = 3M_{s-1} \\ M_0 = 1 \end{cases}$$

$$(E-3)M_s = \bar{0}; M_s = 3^{\log n} = n^{\log 3}$$

puis le calcul pour les additions :

$$\begin{cases} A_s = 3A_{s-1} + 2 * (2^s - 1) + 2^{s-1} + 2^s \\ A_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} (E-3)A_s = 2^{k+1} - 2 + 2^{k-1} + 2^k \\ (E-3)A_s = 7 \cdot 2^{k+1} - 2 \\ (E-2)(E-3)A_s = \bar{0} \\ A_s = i3^s + j2^s + l \\ A_0 = A(1) = 0 \longrightarrow l + i + j = 0 \\ A_1 = A(2) = 5 \longrightarrow 3i + 2j + l = 5 \end{array}$$