Fiche TD 10

Exercice 1 - De la $\mathcal{NP}$-complétude

Montrer que les problèmes suivants sont NP-complets :

Chevaliers de la table ronde Etant donnés n chevaliers, et connaissant toutes les paires de féroces ennemis parmi eux, est-il possible de les placer autour d'une table circulaire de telle sorte qu'aucune paire de féroces ennemis ne soit côte à côte ?

Deux cliques Etant donné un graphe $G = (V, E)$, et un entier $K > 0$, existe-t-il deux cliques disjointes de taille K dans G ? On rappelle qu'une clique est un sous-ensemble de sommets tous adjacents deux à deux.

Chemin avec paires interdites Soient $G = (V, E)$ un graphe orienté (on distingue l'arc (u,v) de l'arc (v,u)), deux sommets de ce graphe $s, t \in V$ et une liste $C = \{(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)\}$ de paires de sommets de G. Existe-t-il un chemin orienté de s vers t dans G qui contient au plus un sommet de chaque paire de la liste C ?
Indication: faire une réduction à partir de 3-SAT.

Vertex Cover avec degré pair Soient $G = (V, E)$ un graphe dont tous les sommets sont de degré pair, et $k \geq 1$ un entier. Existe-t-il un ensemble de sommets de G couvrant toutes les arêtes et de taille inférieure ou égale à k ?

2-Partition avec même cardinal Soient $n = 2p$ un entier pair, et n entiers strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Existe-t-il une partition de $\{1, 2, \ldots n\}$ en deux ensembles I et I' de même cardinal p et tels que $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I'} a_i$?

Clique pour graphe régulier Soient $G = (V, E)$ un graphe dont tous les sommets sont de même degré, et $k \geq 1$ un entier. Existe-t-il une clique de taille supérieure ou égale à k ?

Roue Etant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un entier $K \geq 3$, déterminer si G contient une roue de taille K, i.e. un ensemble de $K + 1$ sommets w, v_1, v_2, $\ldots$, v_K tels que $(v_i, v_{i+1}) \in E$ pour $1 \leq i < K$, $(v_K, v_1) \in E$ et $(v_i, w) \in E$ pour $1 \leq i \leq K$ (w est le centre de la roue).

Dominateur Etant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un entier $K \geq 3$, déterminer si G contient un dominateur de cardinal K, i.e. un sous-ensemble $D \subset V$ de cardinal K tel que pour tout sommet $u \in V \setminus D$, il existe $u \in D$ avec $(u, v) \in E$

2-Partition-Approx Etant donnés n entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$, peut-on trouver un sous-ensemble $I \subset [1..n]$ tel que $|\sum_{i \in I} a_i - \sum_{i \notin I} a_i| \leq 1$

Charpentier Etant données n baguettes rigides de longueur entières $a_1, a_2, \ldots, a_n$, pouvant être reliées dans cet ordre bout-à-bout par des charnières, et étant donné un entier k, peut-on assembler toutes les baguettes de manière qu'en repliant la chaîne obtenue la longueur totale ne dépasse pas k