Fiche TD12 - Examen d'algorithmique 2003/2004 - 3 heures

1 Paradigmes classiques: la bibliothèque

La bibliothèque planifie son déménagement. Elle comprend une collection de n livres $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Le livre b_i est de largeur w_i et de hauteur h_i. Les livres doivent être rangés dans l'ordre donné (par valeur de i croissante) sur des étagères identiques de largeur L.

Question 1 On suppose que tous les livres ont la même hauteur $h = h_i, 1 \leq i \leq n$. Montrer que l'algorithme glouton qui range les livres côte à côte tant que c'est possible minimise le nombre d'étagères utilisées.

Question 2 Maintenant les livres ont des hauteurs différentes. Mais la hauteur entre les étagères peut se régler. Le critère à minimiser est alors l'encombrement, défini comme la somme des hauteurs du plus grand livre de chaque étagère utilisée.

1. Donner un exemple où l'algorithme glouton précédent n'est pas optimal
2. Proposer un algorithme optimal pour résoudre le problème, et donner son coût.

Question 3 On revient au cas où tous les livres ont la même hauteur $h = h_i, 1 \leq i \leq n$. On veut désormais ranger les n livres sur k étagères de même longueur L à minimiser, où k est un paramètre du problème. Il s'agit donc de partitionner les n livres en k tranches, de telle sorte que la largeur de la plus large des k tranches soit la plus petite possible. Proposer un algorithme pour résoudre le problème, et donner son coût en fonction de n et k.

2 NP-complétude

Montrer que les problèmes suivants sont NP-complets:

Isomorphisme de graphes Etant donnés deux graphes $H = (V_h, E_h)$ et $G = (V_g, E_g)$, déterminer si H est un sous-graphe de G, i.e. s'il existe une application $f : V_h \to V_g$ telle que $(u, v) \in E_h \Rightarrow (f(u), f(v)) \in E_g$?

Vertex Cover avec degré impair Etant donnés un graphe $G = (V, E)$ dont tous les sommets sont de degré impair, et $k \geq 1$ un entier, déterminer s'il existe un ensemble de sommets de G couvrant toutes les arêtes et de taille inférieure ou égale à k

Chemin hamiltonien avec extrémités fixées Etant donnés un graphe $G = (V, E)$ et deux sommets distincts $u, v \in V$, déterminer si G contient un chemin hamiltonien (qui passe par tous les sommets une fois et une seule) d'extrémités u et v

Chemin hamiltonien Etant donné un graphe $G = (V, E)$, déterminer si G contient un chemin hamiltonien (qui passe par tous les sommets une fois et une seule)

Partition en cliques *(difficile)* Etant donnés un graphe $G = (V, E)$ et $K \geq 1$ un entier, déterminer s'il existe une partition des sommets en au plus K sous-cliques, i.e. s'il existe $k \leq K$ sous-ensembles disjoints V_i dont l'union est V et tels que pour tout i, $1 \leq i \leq k$, deux sommets de V_i sont toujours reliés par une arête de E.

Sous-graphe acyclique *(difficile)* Etant donnés un graphe $G = (V, E)$ et $k \geq 1$ un entier, déterminer si G contient un sous-graphe H induit par k sommets et acyclique (les arêtes de H sont les arêtes de E qui relient deux sommets de H)

3 Approximation du problème du k-centre

On rappelle quelques définitions et résultats:

- Dans un graphe $G = (V, E)$, un *ensemble indépendant* est un sous-ensemble de sommets V' non reliés par des arêtes (si $u \in V'$ et $v \in V'$, alors $(u, v) \notin E$). Trouver un ensemble indépendant de cardinal maximal est NP-difficile.
- Dans un graphe $G = (V, E)$, un *ensemble dominant* est un sous-ensemble de sommets V' tel que tout sommet de $V \setminus V'$ est adjacent à un sommet de V'. On note $dom(G)$ le cardinal minimal d'un ensemble dominant. Trouver un ensemble dominant de cardinal minimal $dom(G)$ est NP-difficile.
- Le carré d'un graphe $G = (V, E)$, noté $G^{(2)} = (V, E^{(2)})$, contient les chemins de longueur au plus deux: $(u, v) \in E^{(2)}$ si $(u, v) \in E$ ou s'il existe $w \in V$ tel que $(u, w) \in E$ et $(w, v) \in E$

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté, complet, dont les arêtes sont pondérées par une fonction de poids w qui vérifie l'inégalité triangulaire: $w(u, v) \leq w(u, w) + w(w, v)$ pour tout triplet de sommets (u, v, w). Soit aussi un entier $k \geq 1$.

Pour tout $S \subset V$ et tout $v \in V \setminus S$, on définit $connect(v, S)$ comme le poids minimal d'une arête reliant v à un sommet de S: $connect(v, S) = \min_{s \in S} \ w(v, s)$. Le problème est de trouver un k-centre, c'est à dire un sous-ensemble S de cardinal k et tel que $center(S) = \max_{v \in V \setminus S} \ connect(v, S)$ soit minimal. On admettra que ce problème est NP-complet, et on va chercher une 2-approximation, i.e. un S de cardinal k tel que $center(S) \leq 2 \cdot OPT$, où $OPT = \min_{S \subset V, |S| = k} \ center(S)$.

On ordonne les arêtes de E par poids croissant: $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \ldots \leq w(e_m)$, où $m = |E|$. On pose $G_i = (V, E_i)$ où $E_i = \{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$ est l'ensemble des i premières arêtes.

Question 1 A quoi peut-il bien servir de déterminer un k-centre (donner un exemple d'application)?

Question 2 Montrer que résoudre le problème du k-centre revient à trouver le plus petit indice i tel que G_i a un ensemble dominant de cardinal au plus k

Question 3 Etant donné un graphe H, soit I un ensemble indépendant du graphe carré $H^{(2)}$. Montrer que $|I| \leq dom(H)$

Question 4 L'algorithme d'approximation du k-centre est le suivant:

1. Construire $G_1^{(2)}, G_2^{(2)}, \ldots, G_m^{(2)}$
2. Trouver de manière gloutonne un ensemble indépendant inextensible (auquel on ne peut pas rajouter des sommets) M_i dans chaque graphe $G_i^{(2)}$
3. Trouver le plus petit indice i tel que $|M_i| \leq k$, soit j cet indice
4. Renvoyer M_j

Montrer que:

(i) $w(e_j) \leq OPT$

(ii) l'algorithme est bien une 2-approximation

Question 5 *(difficile)* Montrer que la borne 2 est stricte: donner un exemple de graphe où l'algorithme réalise effectivement une 2-approximation

Question 6 *(difficile)* Montrer que si $P \neq NP$, il n'existe pas de $(2-\varepsilon)$-approximation au problème du k-centre, pour tout $\varepsilon > 0$