Fiche TD 5

Exercice 1 - Du pétrole et des idées

Le professeur Robert Ive est consultant pour une compagnie pétrolière qui projette de construire un grand oléoduc en ligne droite d'Est en Ouest à travers un champ pétrolier. À partir de chaque puits un raccordement doit être connecté directement sur l'oléoduc principal suivant le plus court chemin. Connaissant les coordonnées des puits, comment le professeur trouvera-t'il l'emplacement idéal de l'oléoduc principal qui minimise la longueur totale des raccordements ?

Exercice 2 - Médian pondéré

Soient n éléments distincts $x_1, ..., x_n$ de poids positifs $p_1, ..., p_n$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Le *médian pondéré (inférieur)* est l'élément x_k satisfaisant :

$$\sum_{x_i < x_k} p_i < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{x_i > x_k} p_i \leq \frac{1}{2}$$

1 - Démontrer que le médian de $x_1, ..., x_n$ est le médian pondéré des x_i affectés des poids $p_i = 1/n$ pour i compris entre 1 et n.

2 - Comment calculer *simplement* le médian pondéré de n éléments. Donner la complexité en comparaisons et en additions.

3 - Comment calculer le médian pondéré en temps linéaire dans le pire des cas.

Exercice 3 - Le problème de l'emplacement du bureau de poste

Considérons un espace métrique (E, d). Soient n éléments distincts $x_1, ..., x_n$ de poids respectifs $p_1, ..., p_n$ tels que

$$\forall i,\ p_i \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

On souhaite trouver un point x (qui n'est pas nécessairement un des x_i) qui minimise $\sum_{i=1}^{n} p_i d(x, x_i)$.

1 - **Cas de la dimension 1 :** (E, d) est l'ensemble des réels muni de la distance usuelle. Montrer que le médian pondéré est une des solutions optimales.

2 - **Cas de la dimension 2 :** (E, d) est le plan muni de la distance 1, ou *distance Manhattan*, c'est à dire :

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

Résoudre l'énoncé qui s'appelle dans ce cas «problème du bureau de poste».